BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2021

Endgültige Fassung

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: Mai 2021

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Ein Würfel mit Kantenlänge 10 wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerlegt. Anschließend wird einer dieser beiden Quader durch einen zweiten ebenen Schnitt weiter in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt.

Welches ist das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader?
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader ist 350.

1. Beweis (Überprüfung aller Möglichkeiten): Der erste Schnitt ist nur parallel zu einer Seitenfläche des Würfels möglich, da andernfalls nicht zwei Quader entstehen. Beide so entstehenden Quader haben eine Grundfläche von 10 x 10 = 100, und da die Höhen ganzzahlig sein müssen und die Summen der beiden Höhen 10 ist, kommen für die beiden Höhen nur die fünf Wertekombinationen 1 und 9, 2 und 8, 3 und 7, 4 und 6 oder 5 und 5 in Frage. Nach dem 1. Schnitt haben wir also stets zwei Quader mit den Volumina 100 und 900, 200 und 800, 300 und 700, 400 und 600 oder 500 und 500.

Für jeden dieser Fälle untersuchen wir, durch welchen Schnitt wir das kleinste Volumen für den größten der dann drei Quader erhalten; offensichtlich ist dies dann der Fall, wenn wir den größeren der beiden Quader (bei Gleichheit einen beliebigen) in zwei Teilquader mit gleichem Volumen schneiden. Dies ist auch tatsächlich möglich, denn die längste Kante jedes Teilquaders hat nach dem ersten Schritt die Länge 10, und der Quader kann nun mit einem Schnitt senkrecht zu dieser Kante und durch ihre Mitte halbiert werden. So erhalten wir nach den beiden Schnitten eine der fünf Kombinationen (der jeweils maximale Wert ist fett gedruckt);

100 / **450** / 450 bzw. 200 / **400** / 400 bzw. 300 / **350** / 350 bzw. **400** / 300 / 300 bzw. **500** / 250 / 250.

Wir haben alle Möglichkeiten untersucht, einfaches Überprüfen dieser Zahlentripel ergibt, dass das kleinstmögliche Volumen des größten Quaders 350 beträgt.

2. Beweis (Teilbarkeitsuntersuchung): Die 12 Kanten des Würfels fassen wir als drei Gruppen zu je vier untereinander parallelen Kanten auf. Mit jedem Schnitt werden nur Kanten einer Gruppe zerschnitten. Nach zwei Schnitten ist eine Gruppe von Kanten noch nicht zerschnitten, d.h. nach zwei Schnitten hat jeder Teilquader eine Kante der Länge 10 und somit ein Volumen, das Vielfaches von 10 ist.

Zuerst zeigen wir die Existenz einer Zerschneidung, bei der der größte Teilquader das Volumen 350 hat: Hierzu markieren wir auf einer Kante des Würfels einen Teilpunkt so, dass die Kante in zwei Segmente der Länge 3 bzw. 7 aufgeteilt wird. Ein hierzu senkrechter ebener Schnitt teilt den Würfel in zwei Quader, von denen der eine die Kantenlängen 3 x 10 x 10 hat. Den anderen mit den Maßen 7 x 10 x 10 zerschneiden wir so, dass wir an einer seiner Kanten mit der Länge 10 den Mittelpunkt markieren und senkrecht zu dieser Kante schneiden. So erhalten wir zwei gleiche Quader mit den Maßen 7 x 5 x 10. Die Volumina der drei Quader sind dann 300, 350 und 350, das größte ist 350.

Nun zeigen wir noch, dass bei keiner solchen Zerschneidung der größte Teilquader ein Volumen haben kann, das kleiner ist als 350: Der Würfel mit Kantenlänge 10 hat das Volumen 1000. Teilt man den Würfel irgendwie in drei Teile, so gibt es in jedem Fall einen Teilkörper, dessen Volumen nicht kleiner ist als 1000 : 3 = $333^1/_3$. Nun ist 340 das einzige Vielfache von 10, das mindestens $333^1/_3$ und kleiner als 350 ist. Damit genügt es, schärfer zu zeigen, dass bei jeder Zerlegung kein Quader (nicht nur der größte) das Volumen 340 haben kann. Dies zeigen wir mit einer Teilbarkeitsuntersuchung:

Da die Kantenlängen der Teilquader ganzzahlig sein müssen und höchstens die Länge 10 haben, muss das Volumen jedes Teilquaders notwendigerweise das Produkt von drei ganzen Zahlen sein, von denen jede höchstens 10 ist. Die Primfaktorzerlegung von 340 ist $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$, d.h. in jeder Zusammenfassung dieser Faktoren zu einem Teilprodukt von drei Faktoren ist einer der Faktoren ein positives Vielfaches von 17, also größer als 10. Eine zulässige Zerschneidung ist also nicht möglich.

Bemerkung: Viele Teilnehmer lasen aus der Formulierung "*des größten Quaders*" heraus, dass es nicht zwei gleich große größte Quader geben darf. Eine Angabe des Ergebnisses 300/300/400 wurde als richtig gewertet, wenn sie unter dieser Voraussetzung korrekt hergeleitet wurde.

Aufgabe 2:Der Bruch $\frac{3}{10}$ kann auf genau zwei Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden: $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

a) Auf wie viele verschiedene Arten kann $\frac{3}{2021}$ als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden?

b) Gibt es eine nicht durch 3 teilbare positive ganze Zahl n mit der Eigenschaft, dass $\frac{3}{n}$ auf genau 2021 Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden kann?

Erläuterung: Ein Stammbruch ist ein Bruch der Form $\frac{1}{z}$, wobei z eine positive ganze Zahl ist.
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Bemerkung: Aus dem Beispiel in der Aufgabenstellung geht hervor, dass Darstellungen einer Zahl als Summe von Stammbrüchen als gleich gelten, wenn sie sich nur in der Reihenfolge ihrer Summanden unterscheiden.

Antworten: zu a) Der Bruch $\frac{3}{2021}$ kann auf genau drei Arten dargestellt werden.

zu b) ja, z.B. u.a. $n = 2^{4042}$, $n = 2^{4041}$, $n = 2 \cdot 7^{1010}$, $n = 2^{85} \cdot 7^{23}$, $n = 2^{93} \cdot 7^{21}$.

1. Beweis zu a): Die Aufgabenstellung fordert, die Anzahl der Paare $(a;b)$ von positiven ganzen Zahlen mit $a \le b$ zu bestimmen, für die $\frac{3}{2021} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt. Wir formen äquivalent um:

$$\frac{3}{2021} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff 3 \cdot (3ab - 2021(a+b)) = 3 \cdot 0 \iff (3a - 2021)(3b - 2021) = 2021^2.$$

Da a und b positive ganze Zahlen sind, sind auch die beiden Faktoren $(3a - 2021)$ und $(3b - 2021)$ auf der linken Seite ganze Zahlen. Wären beide negativ, wären wegen $a,b \ge 0$ sowohl $|(3a - 2021)| < 2021$ als auch $|(3b - 2021)| < 2021$, was den Widerspruch $(3a - 2021)(3b - 2021) < 2021^2$ ergibt. Da $2021^2 > 0$, sind also beide Faktoren positiv. Mit $a \le b$ ist auch $(3a - 2021) \le (3b - 2021)$, und weil $2021^2 = 43^2 \cdot 47^2$ die Primfaktorzerlegung von 2021^2 ist, muss notwendigerweise der Faktor $(3a - 2021)$ einen der Werte 1, 43, 47, 43^2 oder $43 \cdot 47$ annehmen, der Faktor $(3b - 2021)$ dann den jeweils dazu passenden Komplementärteiler $43^2 \cdot 47^2$, $43 \cdot 47^2$, $43^2 \cdot 47$, 47^2 bzw. $43 \cdot 47$. Die Fälle $(3a - 2021) = 47$ und $(3a - 2021) = 43 \cdot 47$ scheiden aus, weil $(3a - 2021) \equiv 1 \mod 3$, aber $47 \equiv 43 \cdot 47 \equiv 2 \mod 3$. Die restlichen drei Fälle führen zu

$(3a - 2021) = 1$, $(3b - 2021) = 43^2 \cdot 47^2$,

$\Rightarrow a = (1 + 2021) : 3 = 674$ und $b = (2021^2 + 2021) : 3 = 1\,362\,154$,

$(3a - 2021) = 43$ und $(3b - 2021) = 43 \cdot 47^2$

$\Rightarrow a = (43 + 2021) : 3 = 688$ und $b = (43 \cdot 47^2 + 43 \cdot 47) : 3 = 48 \cdot 2021 : 3 = 32\,336$,

$(3a - 2021) = 43^2$ und $(3b - 2021) = 47^2$

$\Rightarrow a = (43^2 + 43 \cdot 47) : 3 = 1290$ und $b = (47^2 + 43 \cdot 47) : 3 = 1\,410$.

Eine Probe bestätigt (bzw. ersetzt eine Untersuchung, dass sie nicht nötig ist), dass tatsächlich

$$\frac{3}{2021} = \frac{1}{674} + \frac{1}{1\,362\,154} = \frac{1}{688} + \frac{1}{32\,336} = \frac{1}{1290} + \frac{1}{1\,410}.$$

Variante zu a): Die Aufgabenstellung fordert, die Anzahl der Paare $(a;b)$ von positiven ganzen Zahlen mit $a \le b$ zu bestimmen, für die $\frac{3}{2021} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt.

Es ist $\frac{3}{2021} = \frac{1}{673+\frac{2}{3}}$, d.h. es muss $a,b \ge 674$ gelten. Somit setzen wir $a = a(k) = 674 + k$ mit $k \ge 0$ und erhalten durch Umformung $\frac{1}{b} = \frac{3}{2021} - \frac{1}{674+k} = \frac{3 \cdot 674 + 3k - 2021}{2021 \cdot (674+k)} = \frac{3k+1}{2021 \cdot (674+k)}$, also

$$b = b(k) = \frac{2021 \cdot (674+k)}{3k+1}.$$

Für jedes $k \ge 0$ erhalten wir ein positives b, von denen nicht jedes ganzzahlig ist. Aber wenn b ganzzahlig ist, ist $\frac{3}{2021} = \frac{1}{674+k} + \frac{1}{b}$ eine der gesuchten Darstellungen.

Die Zahl b ist offensichtlich genau dann ganzzahlig, wenn $3k + 1$ Teiler von $2021 \cdot (674 + k)$ ist, und da 3 und $3k + 1$ keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben, gilt dies auch genau dann, wenn $3k + 1$ Teiler von $3 \cdot 2021 \cdot (674 + k) = 2021 \cdot (3 \cdot 674 + 3k) = 2021 \cdot (2021 + 3k + 1) = 2021^2 + 2021 \cdot (3k + 1)$ ist. Da der zweite Summand sicher den Teiler $3k + 1$ hat, bleibt

b ist genau dann ganzzahlig positiv, wenn $k \ge 0$ und $3k + 1$ Teiler von 2021^2 ist. (*)

Da 2021^2 die Primfaktorzerlegung $2021^2 = 43^2 \cdot 47^2$ hat, ist die Bedingung (*) äquivalent zur Bedingung, dass $3k + 1$ ein Teilprodukt dieser Primfaktorzerlegung ist. Da außerdem $43^r \cdot 47^s \equiv 1^r \cdot (-1)^s \mod 3$ und $3k + 1 \equiv 1 \mod 3$ gilt, ist (*) genau dann erfüllt, wenn in diesem Teilprodukt der Exponent von 47 gerade ist. Also ist (*) genau dann erfüllt, wenn $3k +1$ einen der sechs Werte 1, 43, 43^2, 47^2, $43 \cdot 47^2$ oder $43^2 \cdot 47^2$ hat. Weil $3k + 1$ und $674 + k$ streng monoton mit k wachsen, gehören zu verschiedenen Teilern auch verschiedene Werte von k und damit auch von a und b. Der einzige Teiler, der identisch ist mit seinem Komplementärteiler, ist $43 \cdot 47$, dieser ist aber in dieser Menge nicht erhalten. So erhält man sechs verschiedene Darstellungen, von denen sich aber je zwei nur durch die Reihenfolge ihrer Summanden unterscheiden. Es gibt also – wie behauptet – drei Darstellungen.

Bemerkung: Eine konkrete Angabe der Darstellungen ist in der Aufgabenstellung nicht verlangt. Zur Ergänzung seien die Zahlenwerte hier angeführt:

$3k+1$	k	$a = 674 + k$	b
1	0	674	1362154
43	14	688	32336
43^2	616	1290	1410
47^2	736	1410	1290
$43 \cdot 47^2$	31662	32336	688
$43^2 \cdot 47^2$	1361480	1362154	674

2. Beweis (zu beiden Teilaufgaben) Ein Paar $(a;b)$ von positiven ganzen Zahlen mit $a \le b$ nennen wir eine Darstellung der positiven ganzen nicht durch 3 teilbaren Zahl n, falls $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (*) gilt.

Mit $A(n)$ bezeichnen wir die Anzahl solcher Darstellungen. Mit folgendem Hilfssatz (Beweis weiter unten) können die Teilaufgaben schnell gelöst werden:

HS: $A(n) =$ Anzahl der positiven Teiler t von n^2, für die $t < n$ und $t \equiv -n \bmod 3$.

zu a): Die PFZ von 2021 ist $2021 = 43 \cdot 47$, dabei ist $43 \equiv 1 \bmod 3$ und $47 \equiv -1 \bmod 3$, also $2021 \equiv -1 \bmod 3$. Wir suchen die Teiler t von 2021^2 mit $t \equiv 1 \bmod 3$, dies sind diejenigen, in deren PFZ der Exponent von 47 gerade ist, also die Teiler 1, 43, 43^2, $1 \cdot 47^2$, $43 \cdot 47^2$, $43^2 \cdot 47^2$. Dies sind sechs verschiedene Teiler, die wir in drei Paare von Teiler und Komplementärteiler aufteilen können. Also sind drei dieser Teiler kleiner als 2021, die anderen größer als 2021 und der Teiler n mit identischem Komplementärteile ist nicht dabei. Das Ergebnis zu Teilaufgabe a) ist also $A(2021) = 3$.

Variante 1 zu b): $A(2^{4042}) = 2021$: Betrachte $n = q^{2 \cdot 2021}$, wobei q eine beliebige Primzahl mit $q \equiv -1 \bmod 3$ ist (z.B. $q = 2$). Dann ist $n^2 \equiv q^{2 \cdot 2 \cdot 2021} \equiv (-1)^2 \equiv 1 \bmod 3$, und es gibt genau 2021 Teiler von n^2 mit $t < n$ und $t \equiv -1 \bmod 3$, nämlich die 2021 Potenzen q^j mit ungeraden Exponenten $j = 2k - 1$ mit $1 \le k \le 2021$. Mit dem Hilfssatz folgt das Gewünschte.

Variante 2 zu b): $n = 2^{4041}$, $n = 2 \cdot 7^{1010}$, $n = 2^{85} \cdot 7^{23}$, $n = 2^{93} \cdot 7^{21}$

sind auch Zahlen mit $A(n) = 2021$. Diese Zahlen sind von der Form $n = n(r,s) = 2^r \cdot 7^s$ mit ungeradem r. Dann ist $n \equiv (-1)^r \cdot 1^s \equiv -1 \bmod 3$. Die Menge der Teiler t von n^2 mit $t \equiv -n \equiv 1$ besteht dann aus genau den Zahlen der Form $t(i,j) = 2^i \cdot 7^j$ mit $0 \le i \le 2r$, $0 \le j \le 2s$, i gerade. Die jeweiligen Komplementärteiler sind ebenfalls in dieser Teilmenge. Da der Teiler n nicht in dieser Menge enthalten ist, ist die Hälfte aller dieser Teiler kleiner als n, d.h. die Anzahl ist $^1/_2(r + 1)(2s + 1)$. Die Gleichung $^1/_2(r + 1)(2s + 1) = 2021 = 43 \cdot 47$ führt zu den Lösungen $(r,s) = (4041;0)$, $(r,s) = (1;1010)$, $(r,s) = (85,23)$ und $(r,s) = (93;21)$, mit dem HS folgt die Behauptung.

Vermutung: Die Zahl $n = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 11^3 \cdot 17^2 \cdot 23 = 35\,388\,628\,000$ ist die kleinste Zahl mit $A(n) = 2021$.

Beweis 1 des HS: Es genügt zu zeigen, dass es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Darstellungen $(a;b)$ von n und den Teilern t von n^2 mit $t < n$ und $t \equiv -n \bmod 3$ gibt.

Zunächst gilt $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff 3 \cdot (3ab - na - nb) = 3 \cdot 0 \iff (3a - n)(3b - n) = n^2$. (**)

Dabei ist $a \neq b$, da andernfalls aus $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a}$ folgt, dass $a = \frac{2n}{3}$; und da a ganzzahlig ist und $ggt(2;3) = 1$, folgt $3|n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Für die weitere Behandlung können wir also $a < b$ voraussetzen.

Sei nun $(a;b)$ mit $a < b$ eine Darstellung, d.h. a und b erfüllen (**). Da a und b positive ganze Zahlen sind, sind auch $(3a - n)$ und $(3b - n)$ auf der linken Seite ganze Zahlen. Da $0 < a < b$, gilt $(3b - n) > (3a - n) > -n$. Es kann nicht $(3a - n) < 0$ und $(3b - n) < 0$ gelten, weil dies den Widerspruch $n^2 = (3a - n)(3b - n) < (-n)^2$ ergibt, also sind die Faktoren beide positiv.

Nun ordnen wir jeder Darstellung $(a;b)$ den Teiler $t = t(a) = (3a - n)$ zu. Offensichtlich ist t ein positiver Teiler von n^2, und da $t' = (3b - n)$ der Komplementärteiler zu t ist und dieser wegen $a < b$ größer als t ist, gilt $t < \sqrt{n^2} = n$. Offensichtlich ist auch $t = 3a - n \equiv -n \bmod 3$. Schließlich ist $3a - n$ streng monoton wachsend mit a, d.h. zu verschiedenen a gehören auch verschiedene t.

Umgekehrt ordnen wir jedem positiven Teiler t von n^2, für den $t \equiv -n \bmod 3$ und $t < n$ gilt, das Wertepaar $(a;b)$ mit $a = a(t) = {}^1/_3(t + n)$ und $b = b(t') = {}^1/_3(t' + n)$ zu, dabei sei t' der Komplementärteiler zu t. Aus $t < n$ folgt $t < t'$ und somit $a < b$. Weiter sind wegen $t \equiv -n \bmod 3$ sicher a und b beide ganzzahlig und es gilt $n = t \cdot t' = (3a - n) \cdot (3b - n)$, also (**). Damit ist $(a;b)$ eine Darstellung von n. Schließlich ist $^1/_3(t + n)$ streng monoton wachsend mit t, d.h. zu verschiedenen t gehören auch verschiedene a. Damit ist alles gezeigt.

Beweis 2 des HS: Alle Variablen seien ganzzahlig und n nicht durch 3 teilbar. Es gilt

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 3ab = na + nb \Leftrightarrow a(3b - n) = nb \Leftrightarrow b(3a - n) = na.$$

Die linke Seite ist teilbar durch a und durch b, also ist nb Vielfaches von a und na Vielfaches von b. Es gibt also s,t mit $nb = sa$, $na = tb$, Multiplikation beider Seiten ergibt $n^2ab = satb$, also $n^2 = st$.

Aus $na = tb$ folgt $b = \frac{na}{t}$, dies setzen wir wiederum in die Ausgangsgleichung ein und erhalten

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{t}{na} = \frac{n+t}{na}, \text{ also } a = \frac{n+t}{3}, \text{ und weiter } b = \frac{na}{t} = \frac{n(n+t)}{3t} = \frac{\frac{n^2}{t}+n}{3}.$$

Da $\frac{n^2}{t}$ und b ganzzahlig sind, gilt notwendigerweise $\frac{n^2}{t} \equiv -n \bmod 3$. Wir stellen auch noch fest, dass bei festem n zu verschiedenen t auch verschiedene b gehören.

Mit analoger Schlussweise erhalten wir $a = \frac{\frac{n^2}{s}+n}{3}$ und $\frac{n^2}{s} \equiv -n \bmod 3$.

Umgekehrt führt auch jedes Paar (s,t) von Komplementärteilern von n^2 mit $\frac{n^2}{t} \equiv -n \bmod 3$ über obige Formeln zu einer Lösung (a,b) der Ausgangsgleichung, wie eine kurze Probe unter Verwendung von $n^2 = st$ zeigt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3s}{n(n+s)} + \frac{3t}{n(n+t)} = \frac{3s(n+t)+3t(n+s)}{n(n+s)(n+t)} = \frac{3(sn+st+tn+st)}{n(n^2+nt+ns+st)} = \frac{3}{n}.$$

Nun gilt für jeden Teiler t von n^2, dass $\frac{n^2}{t} \equiv -n \bmod 3 \Leftrightarrow t \equiv -n$; dies folgt aus einer Betrachtung der Primfaktoren $q \equiv -1 \bmod 3$ in der Primfaktorzerlegung von n: Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, schreiben wir die Primfaktorzerlegung von n in der Form $n = \prod_{p\equiv 1 \bmod 3} p^{\alpha(p)} \cdot \prod_{q\equiv -1 \bmod 3} q^{\alpha(q)}$ und es gilt

$$n \equiv 1 \bmod 3 \Leftrightarrow S_u := \sum_{q\equiv -1 \bmod 3} \alpha(q) \text{ gerade und } n \equiv -1 \bmod 3 \Leftrightarrow S_u := \sum_{q\equiv -1 \bmod 3} \alpha(q) \text{ ungerade.}$$

Insbesondere ist $t \neq n$. Da s und t Komplementärteiler sind und $n^2 \equiv 1 \bmod 3$, gilt $\frac{n^2}{s} \equiv \frac{n^2}{t} \equiv -n \bmod 3$, d.h. zu den Paaren (s,t) und (t,s) gehören die als gleich betrachteten Lösungspaar (a,b) und (b,a). Nun folgt schließlich

HS: $A(n)$ = Anzahl der positiven Teiler t von n^2, für die $t < n$ und $t \equiv -n \bmod 3$.
= $1/2$ · Anzahl der positiven Teiler t von n^2, für die $t \equiv -n \bmod 3$.

Bemerkung: Als Nebenergebnis erhalten wir: Eine nicht durch 3 teilbare Zahl besitzt genau dann mindestens eine Darstellung von n, wenn n mindestens einen Primteiler $p \equiv -1 \bmod 3$ enthält.

Für $3|n$ mit $m = n/3$ gilt: $\frac{3}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow ab - ma - mb = 0 \Leftrightarrow (a-m)(b-m) = m^2.$ (**),

dann giltt $A(n)$ = Anzahl der Teiler t von $\left(\frac{n}{3}\right)^2$ mit $t \le \left(\frac{n}{3}\right)$.

3. Beweis: Alle vorkommenden Variablen seien – wenn nicht anders bemerkt – positive ganze Zahlen.

Ein Paar (a,b) mit $a \le b$ nennen wir eine *Darstellung* von n, wenn $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ein Paar (a',b') nennen wir eine *Ersatzdarstellung* (ED) von n, wenn

$a'b'|n$, $ggT(a',b') = 1$, $a' \equiv 1 \ mod\ 3$ und $b' \equiv 2\ mod\ 3$.

Die Anzahl der Darstellungen von n bezeichnen wir mit $A(n)$, die Anzahl der ED mit $E(n)$.

Es gilt nun folgender Hilfssatz:

HS: Für nicht durch 3 teilbare Zahlen n gilt: $A(n) = E(n)$.

Als Beweis konstruieren wir eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Darstellungen (a,b) der Zahl n und den ED–Paaren (a',b') dieser Zahl.

Nach Vorgabe einer nicht durch 3 teilbaren Zahl n und eines dazu passenden ED–Paares (a',b') sind die drei Hilfszahlen

$q = q(a',b') := {}^{n}/_{a'b'}$, $z = z(a',b') := {}^{1}/_{3}(a' + b')$ und $g = g(a',b') := qz$ (*)

eindeutig definiert. Da nach Definition $a'b'|n$ und $a' + b' \equiv 1 + 2 \equiv 0\ mod\ 3$ gilt, sind q und z beide ganze positive Zahlen, ferner gilt $n = qa'b'$. Mit $a := qza'$ und $b := qzb'$ erhalten wir so das eindeutig bestimmte Paar (a,b), das wegen

$$\frac{3}{n} = \frac{3}{qa'b'} = \frac{3}{q(a'+b')}\cdot\frac{(a'+b')}{a'b'} = \frac{1}{q\cdot z}\cdot\frac{a'+b'}{a'b'} = \frac{1}{ga'}+\frac{1}{gb'} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

tatsächlich – nach einer evtl. notwendigen Vertauschung der Bezeichnungen, um $a \le b$ zu erreichen – eine Darstellung (a,b) von n ist.

Diese Zuordnung ist eindeutig umkehrbar, d.h. nach Vorgabe einer Darstellung (a,b) von n sind die a' und b' eindeutig rekonstruierbar. Dazu lesen wir (*) von rechts nach links: Die Bedingung $ggT(a',b') = 1$ ist genau dann erfüllt, wenn $g = ggT(a,b)$. Damit sind die Zahlen $a' = {}^{a}/_{g}$ und $b' = {}^{b}/_{g}$ eindeutig aus a und b bestimmbar und ganzzahlig. Gleiches gilt für das Produkt $qz = g$, und q und z sind mittels $q = {}^{n}/_{a'b'}$ und $z = {}^{1}/_{3}(a' + b')$ eindeutig rekonstruierbar. Es bleibt noch nachzuweisen, dass q und z ganzzahlig sind:

Weil (a,b) eine Darstellung von n ist, gilt $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Umformen zu $3ab = n(a + b)$ und Einsetzen ergibt über $3ga'gb' = n(a'g + b'g)$ schließlich $3a'b' = n\frac{a'+b'}{g}$. (**)

In (**) steht links eine positive ganze Zahl, also auch rechts, und beide Seiten müssen die gleiche Primfaktorzerlegung haben. Da $ggT(a',b') = 1$, ist auch $ggT(a',(a' + b')) = ggT(b',(a' + b')) = 1$, d.h. alle Primfaktoren von $a'b'$ auf der linken Seite sind auch Primfaktoren von n auf der rechten Seite, d.h. $a'b'$ ist Teiler von n und damit $q = {}^{n}/_{a'b'}$ eine ganze Zahl. Da nach Voraussetzung n nicht durch 3 teilbar ist, tritt der Primfaktor 3 der linken Seite auf der rechten Seite nicht bei n auf, sondern bei $(a' + b')$. Da aber $ggT(a',b') = 1$, kann nicht $a \equiv b \equiv 0\ mod\ 3$ sein, es bleibt nur $a' \equiv 1\ mod\ 3$ und $b' \equiv 2\ mod\ 3$ oder $a' \equiv 2\ mod\ 3$ und $b' \equiv 1\ mod\ 3$, im letzten Fall tauschen wir die bisher symmetrisch benützten Bezeichnungen a und b. Damit ist die aus (a,b) konstruierte ED–Darstellung (a',b') diejenige, der wir oben eben diese Darstellung (a,b) zugeordnet hatten, d.h. die Zuordnung ist eindeutig und eindeutig umkehrbar, das war zu zeigen.

Mit diesem eben bewiesenen HS können wir nun die gestellten Fragen beantworten:

Wir betrachten die Zahlen n mit der Primfaktorzerlegung $n = 43^N \cdot 47$; für $N = 1$ erhalten wir mit $n = 43^1 \cdot 47 = 2021$ eine Behandlung der Teilaufgabe a). In der Primfaktorzerlegung von n ist 47 einziger Primfaktor mit Dreierrest 2, d.h. in einer ED–Darstellung (a',b') von n enthält b' notwendigerweise den Faktor 47, und wegen $ggT(a',b') = 1$, kann a' diesen Faktor 47 nicht enthalten. Der Faktor b' kann den Faktor 43 enthalten, aber nur, wenn a' ihn nicht enthält. Damit gibt es $2N + 1$ offensichtlich verschiedene Darstellungen $n = q \cdot a' \cdot b'$:

$n = 43^i \cdot 1 \cdot (47 \cdot 43^{N-i})$ mit $0 \le i \le N$, das sind $N + 1$ Darstellungen, sowie
$n = 43^i \cdot 43^{N-i} \cdot 47$ mit $1 \le i \le N$, das sind N Darstellungen.

Mit dem HS erhalten wir $E(n) = 2N + 1 = A(n)$. Für $N = 1$, so erhält man $2 \cdot 1 + 1 = 3$ Darstellungen der Zahl $n = 43^1 \cdot 47 = 2021$. Wählt man $N = 1010$, so erhält man $2 \cdot 1010$ Darstellungen der Zahl $n = 43^{1010} \cdot 47 \approx 2{,}987 \cdot 10^{1651}$.

Die Antwort zu Teilaufgabe a) ist also "3", die Antwort zu Teilaufgabe b) ist also "ja".

Bemerkung: Teilaufgabe a) kann man auch direkt beantworten: Es gibt genau drei Darstellungen von $n = 2021$ als Produkt $qa'b'$ mit $a' \equiv 1 \; mod \; 3$ und $b' \equiv 2 \; mod \; 3$:

$$n = 2021 = qa'b' = 1 \cdot 1 \cdot 2021 = 1 \cdot 43 \cdot 47 = 43 \cdot 1 \cdot 47;$$

diese führen zu folgenden drei – tatsächlich verschiedenen – Darstellungen:

$qz_1 = {}^{1 \cdot (1 + 2021)}/_3 = 674$, also $a = 674 \cdot 1 = 647$, $b = 674 \cdot 47 = 31\,678$,

$qz_2 = {}^{1 \cdot (43 + 47)}/_3 = 30$, also zu $a = 43 \cdot 30 = 1\,290$, $b = 47 \cdot 30 = 1\,410$,

$qz_3 = {}^{43 \cdot (1 + 47)}/_3 = 688$, also zu $a = 1 \cdot 688 = 688$, $b = 688 \cdot 47 = 32\,336$.

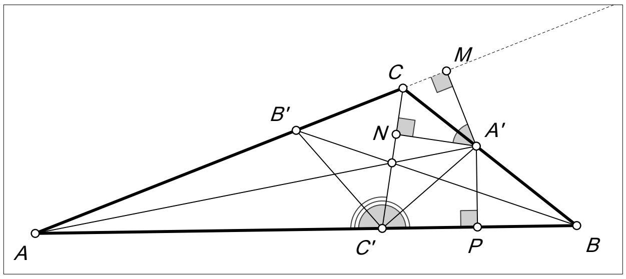
Aufgabe 3: In einem Dreieck ABC sei $\angle ACB = 120°$, und die Innenwinkelhalbierenden durch A, B und C schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in A' bzw. B' bzw. C'.

Wie groß ist der Winkel $\angle A'C'B'$?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Es gilt $\angle A'C'B' = 90°$.

1. Beweis (elementargeometrisch): Die Lotfußpunkte der Lote von A' auf AC, CC' und AB seien mit mit M, N bzw. P bezeichnet.



Nach Voraussetzung ist $\angle ACB = 120°$, ferner halbiert CC' den Winkel $\angle ACB$. Also ist

$$\angle NCA' = {}^1\!/_2 \cdot 120° = 60°$$

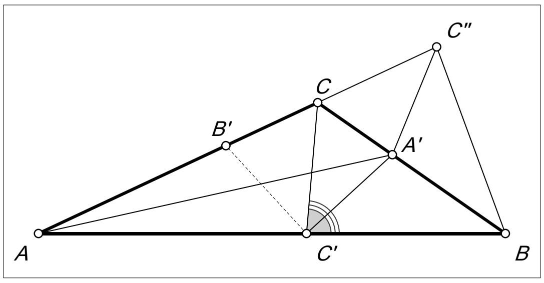
$$= 180° - 120° = \angle A'CM.$$

Damit stimmen die rechtwinkligen Dreiecke $A'NC$ und $A'MC$ in zwei Winkeln überein und haben die gemeinsame Seite $A'C$, sind also nach *wsw* kongruent. Insbesondere gilt $\overline{A'M} = \overline{A'N}$.

Weil aber A' auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ liegt, gilt auch $\overline{A'P} = \overline{A'M} = \overline{A'N}$. Es stimmen also die Dreiecke $A'NC'$ und $A'PC'$ in der Länge zweier Seiten und der Weite des rechten Winkels überein, sind also ebenfalls kongruent. Insbesondere gilt also $\angle A'C'N = \angle A'C'P$.

Führt man vom Punkt B' die analoge Überlegung aus, erhält man $\angle B'C'A = \angle B'C'C$. Damit gilt $180° = 2 \cdot \angle A'C'N + 2 \cdot \angle NC'B' = 2 \cdot \angle A'C'B'$. Hieraus folgt sofort $\angle A'C'B' = 90°$; dies war zu zeigen.

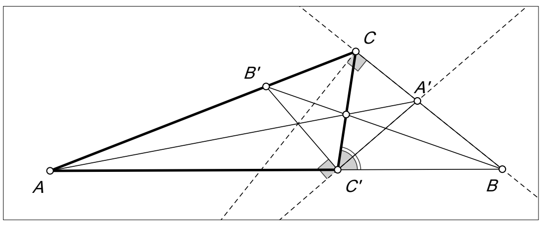
2. Beweis: Wir spiegeln C' an der Geraden BC, das Bild sei C''. Nun ist $\angle BCC'' = \angle C'CB$, und weil nach Voraussetzung $\angle ACC' = \angle C'CB = {}^1\!/_2 \cdot 120° = 60°$, ist $\angle ACC'' = 3 \cdot 60° = 180°$, d.h. C liegt auf AC''.



Im Dreieck ABC'' sind BC und AA' Winkelhalbierende. Nach bekanntem Satz liegt ihr Schnittpunkt auch auf der dritten Winkelhalbierenden, d.h. $C''A'$ halbiert den Winkel bei C''. Da die Dreiecke BCC'' und BCC' symmetrisch bez. der Geraden BC liegen, halbiert $C'A'$ den Winkel $\angle BC'C$. Analog schließen wir, dass $C'B'$ den Winkel $\angle CC'A$ halbiert. Also ist $\angle A'C'B' = {}^1\!/_2 \cdot (\angle BC'C + \angle CC'A) = {}^1\!/_2 \cdot 180° = 90°$.

3. Beweis: Im Teildreieck $AC'C$ gilt $\angle ACC' = \angle C'CB = 120° : 2 = 60°$,

also schließt die Winkelhalbierende von $\angle ACC'$ mit der Geraden CB einen Winkel von $60° : 2 + 60° = 90°$ ein. Damit ist CB Außenwinkelhalbierende und ihr Schnittpunkt mit der Innenwinkelhalbierenden von A ist nach bekanntem Satz der Mittelpunkt des Ankreises an die Seite $C'C$; ferner geht auch die Außenwinkelhalbierende in C' durch diesen Mittelpunkt. Diese muss also die Gerade $C'A'$ sein. Es folgt $\angle BC'A' = \angle A'C'C$. Mit analoger Schlussweise im Teildreieck $CC'B$ erhalten wir $\angle CC'B' = \angle B'C'A$, also $180° = 2 \cdot \angle A'C'C + 2 \cdot \angle CC'B' = 2 \cdot \angle A'C'B'$, also $\angle A'C'B' = 90°$.

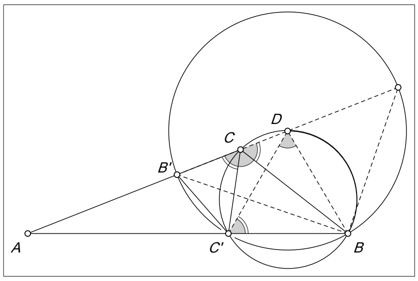


4. Beweis: (sin–Satz): Es ist $sin(120°) = sin(180°–120°) = sin(60°) = sin(^{120°}/_2)$. Da CC' Winkelhalbierende im Dreieck ABC ist, ist $\angle ACC' = 60°$. Bekanntlich teilt im Dreieck eine Winkelhalbierende die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten (vgl. Hilfssatz im 7. Beweis), und da es auf der gegenüber liegenden Seite aus nur einen Punkt mit dieser Eigenschaft gibt, gilt auch die Umkehrung. Dies wenden wir zusammen mit sin–Satz in den Dreiecken $AC'C$ und ABC an und erhalten

$$\overline{CC'} : \overline{AC'} = sin(\alpha) : sin(60°) = sin(\alpha) : sin(120°) = \overline{CB} : \overline{BA} = \overline{CB'} : \overline{AB'},$$

also ist CB' Winkelhalbierende im Dreieck $AC'C$. Mit analoger Schlussweise erhalten wir, dass $\angle BC'C$ von $C'A'$ halbiert wird, und so ist $\angle A'C'B' = \angle A'C'C + \angle CC'B' = {}^1/_2 \angle BC'A = {}^1/_2 \cdot 180° = 90°$.

5. Beweis (Apollonius–Kreis): Sei D der eindeutig bestimmte Punkt auf der Geraden AC, für den $\overline{DB'} = \overline{DB}$; und sei k der Kreis um D, der B' enthält und damit auch B. Nach bekanntem Satz teilt im Dreieck ABC die Winkelhalbierende von B die Seite AC im Verhältnis $\overline{CB'} : \overline{B'A} = \overline{CB} : \overline{BA}$. Da der Mittelpunkt von k auf der Geraden AC liegt, ist k der Apollonius–Kreis zur Strecke AC mit dem Teilverhältnis $\overline{CB'} : \overline{B'A}$, d.h. für jeden Punkt X auf diesem Kreis gilt $\overline{CX} : \overline{XA} = \overline{CB'} : \overline{B'A} = \overline{CB} : \overline{BA}$.



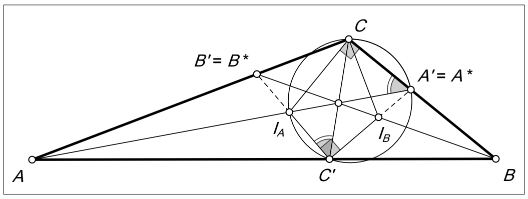
Weiter ist das Dreieck $B'BD$ gleichschenklig mit Basis $B'B$. Zusammen mit Außenwinkelsatz im Dreieck $AB'B$ folgern wir

$$\alpha + {}^1/_2\beta = \angle BB'D = \angle DBB' = {}^1/_2\beta + \angle DBC, \text{ also } \angle DBC = \alpha.$$

Nun setzen wir $\gamma = 120°$ voraus. Dann gilt $\angle DBA = \alpha + \beta = 180° – 120° = 60°$ (unabhängig von der Lage von C !), außerdem teilen die Geraden CC' und CB den gestreckten Winkel bei C in drei gleich große Winkel zu je 60° auf. Damit haben die Dreiecke $AC'C$ und BDC die gleichen Innenwinkel 60° und α, sind also ähnlich und es gilt $\overline{CD} : \overline{CC'} = \overline{CB} : \overline{CA}$. Hieraus folgt zusammen mit $\angle C'CD = \angle ACB$ nach sws, dass auch die Dreiecke $C'CD$ und ACB ähnlich sind und hieraus $\angle DC'C = \angle BAC = \alpha$.

Dies führt schließlich zur Erkenntnis, dass die Punkte C', C, D und B auf dem gleichen Kreisbogen über der Sehne CD liegen. Nach Umfangswinkelsatz sind Winkel über der gemeinsamen Sehne DB gleich, d.h. es gilt $\angle C'DB = C'CB = 60° = \angle DBC'$. Also ist das Dreieck $BC'D$ gleichseitig, insbesondere $\overline{DB} = \overline{DC'}$, d.h. C' liegt auch auf dem Apollonius–Kreis k. Damit gilt $\overline{CC'} : \overline{C'A} = \overline{CB'} : \overline{B'A}$, d.h. $C'B'$ halbiert den Winkel $CC'A$. Von hier schließen wir wie in Variante 2.

6. Beweis (Umfangswinkelsatz): Zunächst sei γ noch beliebig gewählt. Seien I_A und I_B die Inkreismittelpunkte der Dreiecke $AC'C$ bzw. $C'BC$, sowie A^* und B^* die Schnittpunkte von $C'I_B$ mit BC bzw. $C'I_A$ mit AC. Dann sind CI_A, $C'I_A$ und AA' die Winkelhalbierenden im Dreieck $AC'C$, diese schneiden sich im Punkt I_A. Insbesondere ist $I_AA' = AA'$. Entsprechendes gilt für die Winkelhalbierenden CI_B, $C'I_B$ und $BB' = I_BB'$ im Dreieck $C'BC$ und den Punkt I_B. Außerdem teilen die Geraden CI_A, CC' und CI_B den Winkel γ in vier gleiche Teile auf. Zusätzliche gilt



$$\angle B^*C'A^* = {}^1/_2 \angle BC'C + {}^1/_2 \angle CC'A = {}^1/_2 \angle BC'A = 90°, \qquad (*)$$

d.h. es genügt zu zeigen, dass $A' = A^*$ und $B' = B^*$.

Mit dem Satz von der Winkelsumme und vom Außenwinkel bestimmen wir in Abhängigkeit von α und γ

im Dreieck $AC'C$: $\angle CC'I_A = {}^1/_2 \cdot (180° – {}^\gamma/_2 – \alpha) = 90° – {}^\gamma/_4 – {}^\alpha/_2$,
im Dreieck $AA'C$: $\angle CA'I_A = \angle CA'A = 180° – \gamma – {}^\alpha/_2$.

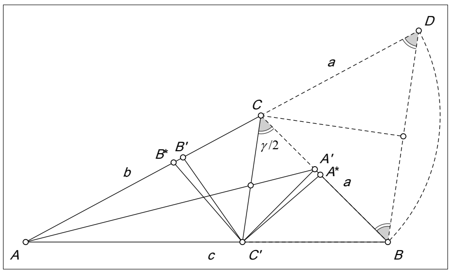
Wenn nun $\gamma = 120°$, dann (und nur dann) sind mit (*) diese beiden Winkel gleich, d.h. es gilt

$$\gamma = 120° \Leftrightarrow \angle CA'I_A = \angle CC'I_A \text{ und } \angle I_ACA' = 90°. \qquad (**)$$

Da A' und A^* auf der gleichen Geraden durch C liegen, gilt nun $\angle I_ACA' = \angle I_ACA^* \angle A^*C'I_A = 90°$. Also liegen die Punkte I_A, C', A^* und C auf dem Thaleskreis über I_AA^*. Weiter sind über dessen Sehne I_AC die Winkel $CA'I_A$ und $CC'I_A$ gleich, also liegt nach Umfangswinkelsatz auch A' auf diesem Kreis. Damit sind A' und A^* Schnittpunkte dieses Umkreises mit der Geraden BC, beide verschieden von C, und da es höchstens zwei solche Schnittpunkte gibt, ist $A' = A^*$. Analog zeigen wir, dass $B^* = B'$, das war zu zeigen.

7. Beweis (Strahlensatz, mögl. Verallgemeinerung mit $\cos$–Funktion): Seien A^* und B^* die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden von $\angle BC'C$ bzw. $CC'A$ mit der Seite BC bzw. AC. Wir werden zeigen, dass A' und A^* sowie B' und B^* genau dann zusammenfallen, wenn $\gamma = 120°$.

Es gilt der bekannte Hilfssatz:



HS Eine Gerade durch eine Ecke eines Dreiecks ist genau dann Winkelhalbierende, wenn sie die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Beweis (vgl. Figur): Sei CC' Winkelhalbierende. Wir ergänzen auf der Verlängerung von AC den Punkt D, für den $\overline{CD} = \overline{CB}$ gilt. Dann ist das Dreieck BCD gleichschenklig, also die Basiswinkel gleich und es gilt

$$2\angle CDB \;=\; 180° - \angle BCD \;=\; 180° - (180° - \gamma) = \gamma,$$

$$\text{also } \angle CDB \;=\; \angle DBC \;=\; \gamma/2 \;=\; \angle C'CB.$$

Also ist nach Stufenwinkelsatz $BD \parallel C'C$, nach Strahlensatz mit Zentrum A folgt mit $\overline{BC'} : \overline{AC'} \;=\; \overline{DC} : \overline{AC} \;=\; a : b$, das beweist eine Richtung der Aussage des HS. Und da es genau eine Punkt C' auf AB mit dieser Eigenschaft gibt, gilt auch die Umkehrung.

Anwendung dieses HS im Dreieck ergibt sofort

$$\overline{BC'} \;=\; \frac{ac}{a+b} \quad (*) \quad \text{und} \quad \overline{BA'} \;=\; \frac{ac}{c+b} \qquad (**).$$

Aus der Figur lesen wir zusätzlich ab, dass $\overline{BD} = 2a\cos(\gamma/2)$, woraus folgt, dass

$$\overline{CC'} \;=\; \frac{\overline{BD}\cdot\overline{AC}}{\overline{AD}} \;=\; \frac{2ab}{a+b}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \qquad (***)$$

Aus dem Hilfssatz folgt im Dreieck $BC'C$ zusammen mit (*) und (***):

$$\overline{BA^*} \;=\; \frac{a\cdot\overline{BC'}}{\overline{BC'}+\overline{C'C}} \;=\; \frac{a\cdot\dfrac{ac}{a+b}}{\dfrac{ac}{a+b}+2\cos\dfrac{\gamma}{2}\dfrac{ab}{a+b}} \;=\; \frac{ac}{c+b\cdot 2\cos\dfrac{\gamma}{2}}. \qquad (****)$$

Vergleich von (**) und (****) ergibt: Es gilt $\overline{BA'} = \overline{BA^*} \;\Leftrightarrow\; 2\cos(\gamma/2) \;=\; 1 \;\Leftrightarrow\; \gamma = 120°$, d.h. die Gerade $C'A'$ halbiert genau dann den Winkel $BC'C$, wenn $\gamma = 120°$.

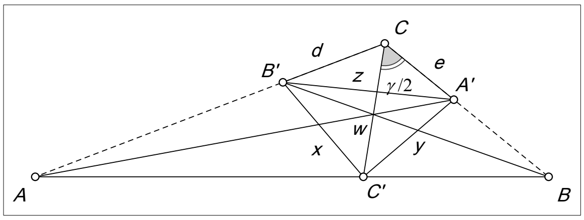
Mit analoger Schlussweise im Teildreieck $AC'C$ erhalten wir, dass dann auch die Gerade $C'B'$ den Winkel $CC'A$ halbiert. Also gilt für $\gamma \;=\; 120°$:

$$180° = 2\cdot\angle A'C'C + 2\cdot\angle CC'B' \;=\; 2\cdot\angle A'C'B', \text{ hieraus folgt sofort } \angle A'C'B' = 90°.$$

Bemerkungen: Es gilt schärfer $\angle B'C'A' = 90° \;\Leftrightarrow\; \gamma = 120°$.

Der 3. Beweis kann einfacher geführt werden, wenn man von Beginn $\gamma = 120°$ voraussetzt. Dann ist BDC ein gleichseitiges Dreieck, d.h. $\overline{BD} \;=\; a$ und man erhält direkt ohne Verwendung der $\cos$–Funktion $\overline{CC'} \;=\; \dfrac{2ab}{a+b}$. Allerdings ist es dann schwieriger, auf das schärfere Ergebnis zu schließen.

8. Beweis (*cos*–Satz und Satz des Pythagoras): Wir wählen die Bezeichnungen wie in der Figur und werden zeigen, dass aus $\gamma = 120°$ folgt, dass im Dreieck $A'B'C'$ die Beziehung $z^2 = x^2 + y^2$ gilt und somit nach Pythagoras $\angle A'C'B' = 90°$.



Falls $\gamma = 120°$, gilt $\cos(\gamma) = -\frac{1}{2}$ und $\cos(\gamma/2) = \frac{1}{2}$, damit gilt in den Dreiecken $B'A'C$, $B'C'C$, $C'A'C$ und ABC nach *cos*–Satz:

$$z^2 = d^2 + e^2 + de$$

$$x^2 = d^2 + w^2 - dw$$

$$y^2 = e^2 + w^2 - ew.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab, \text{ also } c^2 - a^2 + c^2 - b^2 = 2c^2 - a^2 - b^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2;$$

hierbei ist (vgl. 3. Beweis) $d = \frac{ab}{a+c}$, $e = \frac{ab}{b+c}$, $w = \overline{C'C} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{ab}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$.

Dies setzen wir zusammen zu:

$$x^2 + y^2 = d^2 + e^2 + w(w - d + w - e) = d^2 + e^2 + \frac{ab}{a+b}\left(\frac{ab}{a+b} - \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{a+b} - \frac{ab}{b+c}\right)$$

$$= d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+b)}\left(\frac{(a+c)-(a+b)}{(a+b)(a+c)} + \frac{(b+c)-(a+b)}{(a+b)(b+c)}\right)$$

$$= d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+b)^2}\left(\frac{(c-b)(b+c)+(c-a)(a+c)}{(a+c)(b+c)}\right)$$

$$= d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+b)^2}\cdot\left(\frac{(c^2-b^2)+(c^2-a^2)}{(b+c)(a+c)}\right) = d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+b)^2}\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{(a+c)(b+c)}\right)$$

$$= d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+c)(b+c)} = d^2 + e^2 + de = z^2.$$

Dies war zu zeigen.

Aufgabe 4: Die Grundfläche einer Pyramide ist ein regelmäßiges n–Eck. Jede Verbindungsstrecke zweier Ecken der Pyramide mit Ausnahme der Seiten der Grundfläche wird entweder rot oder blau gefärbt.

Beweise: Für $n = 9$ gibt es bei jeder solchen Färbung drei Ecken der Pyramide, die durch drei gleichfarbige Strecken verbunden sind, und für $n = 8$ gilt dies nicht in jedem Fall.

Vorbemerkung: Die Aufgabenstellung unterscheidet gefärbte und ungefärbte Verbindungsstrecken, und unter den gefärbten Verbindungsstrecken nach rot gefärbten und blau gefärbten.

Bezeichnung: Eine Färbung heiße *dreiecksfrei*, wenn es keine drei Ecken gibt, die durch gleichgefärbte Strecken verbunden sind. Ein Tripel von drei Ecken heiße *dreiecksfrei*, wenn von den drei Verbindungsstrecken zwischen diesen Ecken nicht alle drei mit gleicher Farbe gefärbt sind. Verbindungsstrecken zwischen Ecken der Grundfläche, die nicht Seiten sind, nennen wir *Diagonalen*.

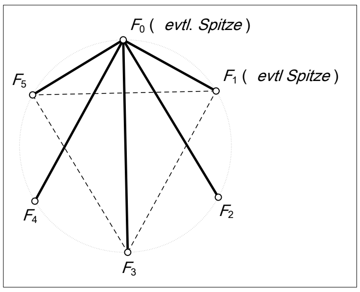
Beweis zu Teil 1: Für $n = 9$ gibt es keine dreiecksfreie Färbung:

Von der Spitze S der Pyramide gehen 9 Verbindungsstrecken zu den Ecken der Grundfläche. Diese sind alle gefärbt, und nach Schubfachprinzip davon mindestens 5 in der gleichen Farbe, o.B.d.A. sei dies rot. Wir wählen 5 dieser roten Strecken aus und bezeichnen ihre Endpunkte auf der Grundfläche fortlaufend im Uhrzeigersinn mit $F_1, F_2, \ldots, F_5$ (vgl. Figur der Variante unten). Da $n > 5$, gibt es mindestens eine Ecke der Grundfläche, die keine der Ecken F_i ist, und somit ist mindestens eine der Strecken F_1F_2, F_2F_3, F_3F_4, F_4F_5 und F_5F_1 eine echte Diagonale, also gefärbt. O.B.d.A. sei dies die Strecke F_5F_1. Auch die Strecken F_1F_3, F_3F_5 sind sicher Diagonalen, d.h. die drei Punkte F_1, F_3 und F_5 sind durch gefärbte Strecken verbunden.

Falls nun mindestens eine der drei Strecken rot gefärbt ist – o.B.d.A. sei dies F_1F_3 –, sind die drei Ecken F_1, F_3 und S durch gleichfarbige Strecken verbunden, und falls keine der drei Strecken rot gefärbt ist, sind diese drei Strecken blau gefärbt, d.h. die drei Ecken F_1, F_3 und F_5 sind durch gleichfarbige Strecken verbunden. Das war zu zeigen.

Variante zu Teil 1 (allgemeiner): Wir beweisen folgenden Hilfssatz:

HS: Wenn von einer Ecke der Pyramide mit einer n–eckigen Grundfläche mit $n \geq 6$ mindestens 5 gleichgefärbte Verbindungsstrecken ausgehen, dann existiert mindestens ein Dreieck, dessen Seiten gleich gefärbt sind.

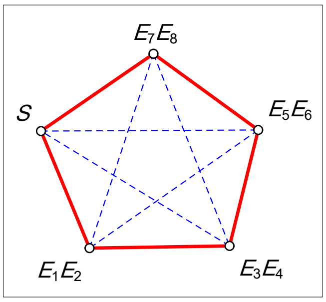


Beweis des HS: O.B.d.A. seien die 5 von der Ecke F_0 ausgehenden Strecken blau gefärbt. Die Endpunkte dieser Strecken seien so mit F_1, $F_2, \ldots, F_5$ bezeichnet, dass keine der Strecken F_1F_3, F_3F_5 und F_5F_1 Seiten des n – Ecks sind. Da $n \geq 6$ gilt, ist dies ist immer möglich: Falls alle Punkte F_i Ecken der Grundfläche sind oder F_1 Spitze der Pyramide ist, wird dies aus der Figur klar, und falls F_0 Spitze der Pyramide ist, wählen wir die Indices so, dass zwischen F_5 und F_1 eine Ecke der Grundfläche liegt, die kein Endpunkt der 5 von F_0 ausgehenden gefärbten Strecken ist. Nun sind entweder diese 3 Strecken alle rot gefärbt, dann sind die Punkte F_1, F_3 und F_5 durch Strecken gleicher Farbe verbunden, oder mindestens eine davon ist blau gefärbt, dann sind ihre Endpunkte und F_0 untereinander durch Strecken gleicher Farbe verbunden. Das war zu zeigen.

Nun zum eigentlichen Beweis: Für $n = 9$ gehen von der Spitze 9 gefärbte Verbindungsstrecken zu den Ecken der Grundfläche, davon nach Schubfachprinzip mindestens 5 mit der gleicher Farbe. Damit existiert nach HS ein gleichgefärbtes Dreieck.

zu Teil 2: Für n = 8 können wir folgendermaßen argumentieren:

Variante 1 (mit Verschärfung der Aussage): Wir betrachten zunächst ein konvexes Fünfeck, in dem wir die fünf Seiten rot und die fünf (echten) Diagonalen blau färben. Da jedes Dreieck aus Verbindungsstrecken in diesem Fünfeck mindestens eine Seite und mindestens eine Diagonale enthält, gibt es kein Dreieck mit drei gleichfarbigen Seiten.

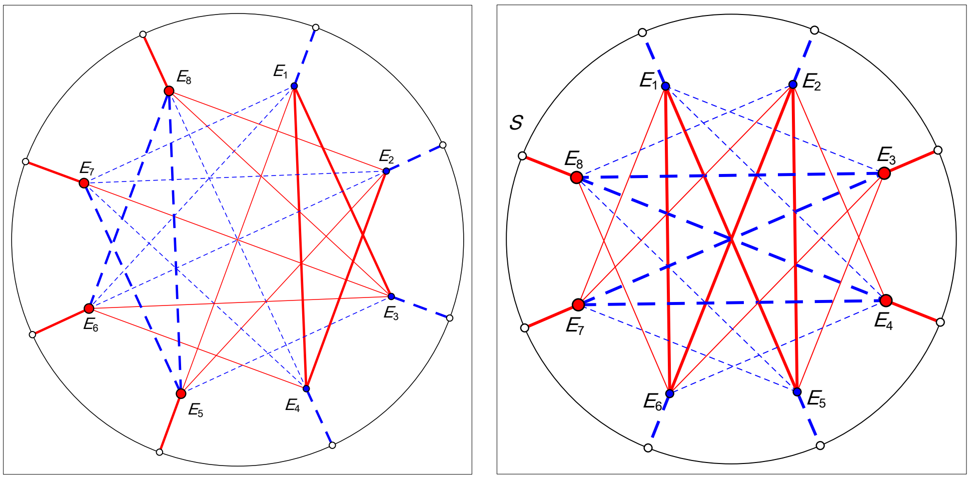


Nun schreiben wir an die erste Ecke E_1 und E_2, an die zweite Ecke E_3 und E_4 usw. und an die fünfte Ecke S für die Spitze (vgl. Figur) und vereinbaren: Die Verbindungsstrecke E_iE_j bzw. SE_k färben wir mit der Farbe, mit der auch die entsprechende Verbindungsstrecke in dem Fünfeck gefärbt ist. Damit bleiben die Verbindungsstrecke E_1E_2, E_3E_4, E_5E_6 und E_7E_8 ungefärbt, alle Verbindungsstrecken, die nach Aufgabenstellung gefärbt werden sollen, sind gefärbt, dazu noch die Strecken E_2E_3, E_4E_5, E_6E_7 und E_8E_1. Alle Dreiecke $E_iE_jE_k$ und SE_jE_k die in der Aufgabenstellung betrachtet werden sollen, tauchen auch in der Figur als nicht entartetes Dreieck auf, dazu noch die Dreiecke, die eine der Seiten E_2E_3, E_4E_5, E_6E_7 oder E_8E_1 enthalten. Aus der Konstruktion ist sofort klar, dass keines dieser Dreiecke drei gleichfarbige Seiten besitzt.

Die Aussage bleibt also richtig, wenn jede zweite Seite der Grundfläche ebenfalls gefärbt wird.

Variante 2: Für n = 8 geben wir in nebenstehenden Figuren zwei konkret dreiecksfreie Färbungen an, dabei ist die Spitze S der Pyramide als Kreis dargestellt.

(Falls die Figur in schwarz–weiß reproduziert wird: Rote Verbindungsstrecken sind durchgezogen, blaue gestrichelt. In der Überprüfung werden zuerst die dicken, dann die dünnen Linien betrachtet.)



Bemerkung: Wenn man Computerberechungen glaubt, gibt es 388 prinzipiell verschiedene dreiecks-freie Färbungen, darunter 28, von denen sich keine zwei durch Drehung oder Spiegelung oder Farbentausch ineinander überführen lassen.

Zu dieser Aufgabe gibt es von Dor Fuchs ein youtube–Video mit dem Titel "Wie ich ein 3D-Problem in 2D lösen konnte (Bundeswettbewerb Mathematik 2021)", das abrufbar ist unter

https://www.youtube.com/watch?v=rxuNXsKOUpA