BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2021

Fassung
für die
Homepage

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: März 2021

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Ein Würfel mit Kantenlänge 10 wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerlegt. Anschließend wird einer dieser beiden Quader durch einen zweiten ebenen Schnitt weiter in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt.

Welches ist das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader ist 350.

1. Beweis (Überprüfung aller Möglichkeiten): Der erste Schnitt ist nur parallel zu einer Seitenfläche des Würfels möglich, da andernfalls nicht zwei Quader entstehen. Beide so entstehenden Quader haben eine Grundfläche von 10 x 10 = 100, und da die Höhen ganzzahlig sein müssen und die Summen der beiden Höhen 10 ist, kommen für die beiden Höhen nur die fünf Wertekombinationen 1 und 9, 2 und 8, 3 und 7, 4 und 6 oder 5 und 5 in Frage. Nach dem 1. Schnitt haben wir also stets zwei Quader mit den Volumina 100 und 900, 200 und 800, 300 und 700, 400 und 600 oder 500 und 500.

Für jeden dieser Fälle untersuchen wir, durch welchen Schnitt wir das kleinste Volumen für den größten der dann drei Quader erhalten; offensichtlich ist dies dann der Fall, wenn wir den größeren der beiden Quader (bei Gleichheit einen beliebigen) in zwei Teilquader mit gleichem Volumen schneiden. Dies ist auch tatsächlich möglich, denn die längste Kante jedes Teilquaders hat nach dem ersten Schritt die Länge 10, und der Quader kann nun mit einem Schnitt senkrecht zu dieser Kante und durch ihre Mitte halbiert werden. So erhalten wir nach den beiden Schnitten eine der fünf Kombinationen (der jeweils maximale Wert ist fett gedruckt);

100 / **450** / 450 bzw. 200 / **400** / 400 bzw. 300 / **350** / 350 bzw. **400** / 300 / 300 bzw. **500** / 250 / 250.

Wir haben alle Möglichkeiten untersucht, einfaches Überprüfen dieser Zahlentripel ergibt, dass das kleinstmögliche Volumen des größten Quaders 350 beträgt.

2. Beweis (Teilbarkeitsuntersuchung): Die 12 Kanten des Würfels fassen wir als drei Gruppen zu je vier untereinander parallelen Kanten auf. Mit jedem Schnitt werden nur Kanten einer Gruppe zerschnitten. Nach zwei Schnitten ist eine Gruppe von Kanten noch nicht zerschnitten, d.h. nach zwei Schnitten hat jeder Teilquader eine Kante der Länge 10 und somit ein Volumen, das Vielfaches von 10 ist.

Zuerst zeigen wir die Existenz einer Zerschneidung, bei der der größte Teilquader das Volumen 350 hat: Hierzu markieren wir auf einer Kante des Würfels einen Teilpunkt so, dass die Kante in zwei Segmente der Länge 3 bzw. 7 aufgeteilt wird. Ein hierzu senkrechter ebener Schnitt teilt den Würfel in zwei Quader, von denen der eine die Kantenlängen 3 x 10 x 10 hat. Den anderen mit den Maßen 7 x 10 x 10 zerschneiden wir so, dass wir an einer seiner Kanten mit der Länge 10 den Mittelpunkt markieren und senkrecht zu dieser Kante schneiden. So erhalten wir zwei gleiche Quader mit den Maßen 7 x 5 x 10. Die Volumina der drei Quader sind dann 300, 350 und 350, das größte ist 350, dies war zu zeigen.

Nun zeigen wir noch, dass bei keiner solchen Zerschneidung der größte Teilquader ein Volumen haben kann, das kleiner ist als 350: Der Würfel mit Kantenlänge 10 hat das Volumen 1000. Teilt man den Würfel irgendwie in drei Teile, so gibt es in jedem Fall einen Teilkörper, dessen Volumen nicht kleiner ist als $1000 : 3 = 333\,^1/_3$. Nun ist 340 das einzige Vielfache von 10, das mindestens $333\,^1/_3$ und kleiner als 350 ist. Damit genügt es zu zeigen, dass das Volumen des größten Quaders nicht 340 sein kann. Dies geschieht mit einer Teilbarkeitsuntersuchung:

Da die Kantenlängen der Teilquader ganzzahlig sein müssen und höchstens die Länge 10 haben, muss das Volumen jedes Teilquaders notwendigerweise das Produkt von drei ganzen Zahlen sein, von denen jede höchstens 10 ist. Die Primfaktorzerlegung von 340 ist $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$, d.h. in jeder Zusammenfassung dieser Faktoren zu einem Teilprodukt von drei Faktoren ist einer der Faktoren ein positives Vielfaches von 17, also größer als 10. Eine zulässige Zerscheidung ist also nicht möglich.

Bemerkung: Wenn in der Mathematik vom "größten Quader" gesprochen wird, ist nicht ausgeschlossen, dass es noch mehrere gleichgroße Quader gibt.

Aufgabe 2:Der Bruch $\frac{3}{10}$ kann auf genau zwei Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden: $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$

a) Auf wie viele verschiedene Arten kann $\frac{3}{2021}$ als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden?

b) Gibt es eine nicht durch 3 teilbare positive ganze Zahl n mit der Eigenschaft, dass $\frac{3}{n}$ auf genau 2021 Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden kann?

Erläuterung: Ein Stammbruch ist ein Bruch der Form $\frac{1}{z}$, wobei z eine positive ganze Zahl ist.
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Bemerkung: Aus dem Beispiel in der Aufgabenstellung geht hervor, dass Darstellungen einer Zahl als Summe von Stammbrüchen als gleich gelten, wenn sie sich nur in der Reihenfolge ihrer Summanden unterscheiden.

Antworten: zu a) Der Bruch $\frac{3}{2021}$ kann auf genau drei Arten dargestellt werden.

zu b) ja, z.B. u.a. $n = 2^{4042}$, $n = 2^{4041}$, $n = 2 \cdot 7^{1010}$, $n = 2^{85} \cdot 7^{23}$, $n = 2^{93} \cdot 7^{21}$.

1. Beweis zu a): Die Aufgabenstellung fordert, die Anzahl der Paare $(a;b;)$ von positiven ganzen Zahlen mit $a \leq b$ zu bestimmen, für die $\frac{3}{2021} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt. Wir formen äquivalent um:

$$\frac{3}{2021} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 3 \cdot (3ab - 2021(a + b)) = 0 \Leftrightarrow (3a - 2021)(3b - 2021) = 2021^2.$$

Da a und b positive ganze Zahlen sind, sind auch die beiden Faktoren $(3a - 2021)$ und $(3b - 2021)$ auf der linken Seite ganze Zahlen. Wären beide negativ, wären wegen $a,b \geq 0$ sowohl $|(3a - 2021)| < 2021$ als auch $|(3b - 2021)| < 2021$, was den Widerspruch $(3a - 2021)(3b - 2021) < 2021^2$ ergibt. Da $2021^2 > 0$, sind also beide Faktoren positiv. Mit $a \leq b$ ist auch $(3a - 2021) \leq (3b - 2021)$, und weil $2021^2 = 43^2 \cdot 47^2$ die Primfaktorzerlegung von 2021^2 ist, muss notwendigerweise der Faktor $(3a - 2021)$ einen der Werte 1, 43, 47, 43^2 oder $43 \cdot 47$ annehmen, der Faktor $(3b - 2021)$ dann den jeweils dazu passenden Komplementärteiler $43^2 \cdot 47^2$, $43 \cdot 47^2$, $43^2 \cdot 47$ bzw. $43 \cdot 47$. Die Fälle $(3a - 2021) = 47$ und $(3a - 2021) = 43 \cdot 47$ scheiden aus, weil $(3a - 2021) \equiv 1 \mod 3$, aber $47 \equiv 43 \cdot 47 \equiv 2 \mod 3$. Die restlichen drei Fälle führen zu

$(3a - 2021) = 1$, $(3b - 2021) = 43^2 \cdot 47^2$,

$\Rightarrow a = (1 + 2021) : 3 = 674$ und $b = (2021^2 + 2021) : 3 = 1362154$,

$(3a - 2021) = 43$ und $(3b - 2021) = 43 \cdot 47^2$

$\Rightarrow a = (43 + 2021) : 3 = 688$ und $b = (43 \cdot 47^2 + 43 \cdot 47) : 3 = 48 \cdot 2021 : 3 = 32336$,

$(3a - 2021) = 43^2$ und $(3b - 2021) = 47^2$

$\Rightarrow a = (43^2 + 43 \cdot 47) : 3 = 1290$ und $b = (47^2 + 43 \cdot 47) : 3 = 1410$.

Eine Probe bestätigt (bzw. ersetzt eine Untersuchung, dass sie nicht nötig ist), dass tatsächlich

$$\frac{3}{2021} = \frac{1}{674}+\frac{1}{1362154} = \frac{1}{688}+\frac{1}{32336} = \frac{1}{1290}+\frac{1}{1410}.$$

2. Beweis zu a) (Variante des 1. Beweises): Die Aufgabenstellung fordert, die Anzahl der Paare $(a;b)$ von positiven ganzen Zahlen mit $a \le b$ zu bestimmen, für die $\frac{3}{2021} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ gilt.

Es ist $\frac{3}{2021} = \frac{1}{673+\frac{2}{3}}$, d.h. es muss $a,b \ge 674$ gelten. Somit setzen wir $a = a(k) = 674 + k$ mit $k \ge 0$ und erhalten durch Umformung $\frac{1}{b} = \frac{3}{2021} - \frac{1}{674+k} = \frac{3\cdot 674+3k-2021}{2021\cdot(674+k)} = \frac{3k+1}{2021\cdot(674+k)}$, also

$$b = b(k) = \frac{2021\cdot(674+k)}{3k+1}.$$

Für jedes $k \ge 0$ erhalten wir ein positives b, von denen nicht jedes ganzzahlig ist, aber wenn b ganzzahlig ist, ist $\frac{3}{2021} = \frac{1}{674+k}+\frac{1}{b}$ eine der gesuchten Darstellungen.

Die Zahl b ist offensichtlich genau dann ganzzahlig, wenn $3k + 1$ Teiler von $2021\cdot(674 + k)$ ist, und da 3 und $3k + 1$ keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben, gilt dies auch genau dann, wenn $3k + 1$ Teiler von $3 \cdot 2021\cdot(674 + k) = 2021 \cdot (3 \cdot 674 + 3k) = 2021 \cdot (2021 + 3k + 1) = 2021^2 + 2021 \cdot (3k + 1)$ ist. Da der zweite Summand sicher den Teiler $3k + 1$ hat, bleibt

b ist genau dann ganzzahlig positiv, wenn $k \ge 0$ und $3k + 1$ Teiler von 2021^2 ist. (*)

Da 2021^2 die Primfaktorzerlegung $2021^2 = 43^2 \cdot 47^2$ hat, ist die Bedingung (*) äquivalent zur Bedingung, dass $3k + 1$ ein Teilprodukt dieser Primfaktorzerlegung ist. Da außerdem $43^r \cdot 47^s \equiv 1^r \cdot (-1)^s \mod 3$ und $3k + 1 \equiv 1 \mod 3$ gilt, ist (*) genau dann erfüllt, wenn in diesem Teilprodukt der Exponent von 47 gerade ist. Also ist (*) genau dann erfüllt, wenn $3k +1$ einen der sechs Werte $1, 43, 43^2, 47^2, 43 \cdot 47^2$ oder $43^2 \cdot 47^2$ hat. Weil $3k + 1$ und $674 + k$ streng monoton mit k wachsen, gehören zu verschiedenen Teilern auch verschiedene Werte von k und damit auch von a und b. Der einzige Teiler, der identisch ist mit seinem Komplementärteiler, ist $43 \cdot 47$, dieser ist aber in dieser Menge nicht erhalten. So erhält man sechs verschiedene Darstellungen, von denen sich aber je zwei nur durch die Reihenfolge ihrer Summanden unterscheiden. Es gibt also – wie behauptet – drei Darstellungen.

Bemerkung: Eine konkrete Angabe der Darstellungen ist in der Aufgabenstellung nicht verlangt. Zur Ergänzung seien die Zahlenwerte hier angeführt:

$3k+1$	k	$674 + k$	b
1	0	674	3162154
43	14	688	32336
43^2	616	1290	1410
47^2	736	1410	1290
$43 \cdot 47^2$	31662	32336	688
$43^2 \cdot 47^2$	1361480	3162154	674

3. Beweis (zu beiden Teilaufgaben) Ein Paar $(a;b)$ von positiven ganzen Zahlen mit $a \le b$ nennen wir eine Darstellung der positiven ganzen nicht durch 3 teilbaren Zahl n, falls $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (*) gilt. Mit $A(n)$ bezeichnen wir die Anzahl solcher Darstellungen. Mit folgendem Hilfssatz (Beweis weiter unten) können die Teilaufgaben schnell gelöst werden:

HS: $A(n) =$ Anzahl der positiven Teiler t von n^2, für die $t < n$ und $t \equiv -n \bmod 3$.

zu a): Die PFZ von 2021 ist $2021 = 43 \cdot 47$, dabei ist $43 \equiv 1 \bmod 3$ und $47 \equiv -1 \bmod 3$, also $2021 \equiv -1 \bmod 3$. Wir suchen die Teiler t von 2021^2 mit $t \equiv 1 \bmod 3$, dies sind diejenigen, in deren PFZ der Exponent von 47 gerade ist, also die Teiler $1, 43, 43^2, 1 \cdot 47^2, 43 \cdot 47^2, 43^2 \cdot 47^2$. Dies sind sechs verschiedenen Teiler, die wir in drei Paare von Teiler und Komplementärteiler aufteilen können. Also sind drei dieser Teiler kleiner als 2021, die anderen größer als 2021 (der Teiler n mit identischem Komplementärteile ist nicht dabei). Das Ergebnis zu Teilaufgabe a) ist also $A(2021) = 3$.

Variante 1 zu b): $A(2^{4042}) = 2021$: Betrachte $n = q^{2 \cdot 2021}$, wobei q eine beliebige Primzahl mit $q \equiv -1 \bmod 3$ ist (z.B. $q = 2$). Dann ist $n^2 \equiv q^{2 \cdot 2 \cdot 2021} \equiv (-1)^2 \equiv 1 \bmod 3$, und es gibt genau 2021 Teiler von n^2 mit $t < n$ und $t \equiv -1 \bmod 3$, nämlich die 2021 Potenzen q^j mit ungeraden Exponenten $j = 2k - 1$ mit $1 \le k \le 2021$. Mit dem Hilfssatz folgt das Gewünschte.

Variante 2 zu b): $A(n) = 2021$ für $n = 2^{4041}$, $n = 2 \cdot 7^{1010}$, $n = 2^{85} \cdot 7^{23}$, $n = 2^{93} \cdot 7^{21}$: Betrachte Zahlen der Form $n = n(r,s) = 2^r \cdot 7^s$ mit ungeradem r. Dann ist $n \equiv (-1)^r \cdot 1^s \equiv -1 \bmod 3$. Die Menge der Teiler t von n^2 mit $t \equiv -n \equiv 1$ besteht dann aus genau den Zahlen der Form $t(i,j) = 2^i \cdot 7^j$ mit $0 \le i \le 2r$, $0 \le j \le 2s$, i gerade. Die jeweiligen Komplementärteiler sind ebenfalls in dieser Teilmenge. Da der Teiler n nicht in dieser Menge enthalten ist, ist die Hälfte aller dieser Teiler kleiner als n, d.h. die Anzahl ist $\frac{1}{2}(r + 1)(2s + 1)$. Die Gleichung $\frac{1}{2}(r + 1)(2s + 1) = 2021 = 43 \cdot 47$ führt zu den Lösungen $(r,s) = (4041;0)$, $(r,s) = (1;1010)$, $(r,s) = (85,23)$ und $(r,s) = (93;21)$, mit dem HS folgt die Behauptung.

Vermutung: Die Zahl $n = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 11^3 \cdot 17^2 \cdot 23 = 35\,388\,628\,000$ ist die kleinste Zahl mit $A(n) = 2021$.

1. Beweis des HS: Es genügt zu zeigen, dass es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Darstellungen $(a;b)$ von n und den Teilern t von n^2 mit $t < n$ und $t \equiv -n \bmod 3$ gibt.

Zunächst gilt $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 3 \cdot (3ab - na - nb) = 3 \cdot 0 \Leftrightarrow (3a - n)(3b - n) = n^2$. (**)

Dabei kann nicht $a = b$ sein, da sonst aus $\frac{3}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$ folgt, dass $a = \frac{2n}{3}$; und da a ganzzahlig ist und $ggt(2;3) = 1$, folgt $3|n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Für die weitere Behandlung können wir also $a < b$ voraussetzen.

Sei nun $(a;b)$ mit $a < b$ eine Darstellung, d.h. a und b erfüllen (**). Da a und b positive ganze Zahlen sind, sind auch $(3a - n)$ und $(3b - n)$ auf der linken Seite ganze Zahlen. Da $0 < a < b$, gilt $(3b - n) > (3a - n) > -n$. Es kann nicht $(3a - n) < 0$ und $(3b - n) < 0$ gelten, weil dies den Widerspruch $n^2 = (3a - n)(3b - n) < (-n)^2$ ergibt, also sind die Faktoren beide positiv.

Nun ordnen wir jeder Darstellung $(a;b)$ den Teiler $t = t(a) = (3a - n)$ zu. Offensichtlich ist t ein positiver Teiler von n^2, und da $t' = (3b - n)$ der Komplementärteiler zu t ist und dieser wegen $a < b$ größer als t ist, gilt $t < \sqrt{n^2} = n$. Offensichtlich ist auch $t = 3a - n \equiv -n \bmod 3$. Schließlich ist $3a - n$ streng monoton wachsend mit a, d.h. zu verschiedenen a gehören auch verschiedene t.

Umgekehrt ordnen wir jedem positiven Teiler t von n^2, für den $t \equiv -n \bmod 3$ und $t < n$ gilt, das Wertepaar $(a;b)$ mit $a = a(t) = \frac{1}{3}(t + n)$ und $b = b(t') = \frac{1}{3}(t' + n)$ zu, dabei sei t' der Komplementärteiler zu t. Aus $t < n$ folgt $t < t'$ und somit $a < b$. Weiter sind wegen $t \equiv -n \bmod 3$ sicher a und b beide ganzzahlig und es gilt $n = t \cdot t' = (3a - n) \cdot (3b - n)$, also (**). Damit ist $(a;b)$ eine Darstellung von n. Schließlich ist $\frac{1}{3}(t + n)$ streng monoton wachsend mit t, d.h. zu verschiedenen t gehören auch verschiedene a. Damit ist alles gezeigt.

2. Beweis des HS: Alle Variablen seien ganzzahlig und n nicht durch 3 teilbar. Es gilt

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow 3ab = na + nb \Leftrightarrow a(3b-n) = nb \Leftrightarrow b(3a-n) = na.$$

Die linke Seite ist teilbar durch a und durch b, also ist nb Vielfaches von a und na Vielfaches von b. Es gibt also s,t mit $nb = sa$, $na = tb$, Multiplikation beider Seiten ergibt $n^2ab = satb$, also $n^2 = st$.

Aus $na = tb$ folgt $b = \frac{na}{t}$, dies setzen wir wiederum in die Ausgangsgleichung ein und erhalten

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{a}+\frac{t}{na} = \frac{n+t}{na}, \text{ also } a = \frac{n+t}{3}, \text{ und weiter } b = \frac{na}{t} = \frac{n(n+t)}{3t} = \frac{\frac{n^2}{t}+n}{3}.$$

Da $\frac{n^2}{t}$ und b ganzzahlig sind, gilt notwendigerweise $\frac{n^2}{t} \equiv -n \bmod 3$. Wir stellen auch noch fest, dass bei festem n zu verschiedenen t auch verschiedene b gehören.

Mit analoger Schlussweise erhalten wir $a = \frac{\frac{n^2}{s}+n}{3}$ und $\frac{n^2}{s} \equiv -n \bmod 3$.

Umgekehrt führt auch jedes Paar (s,t) von Komplementärteilern von n^2 mit $\frac{n^2}{t} \equiv -n \bmod 3$ über obige Formeln zu einer Lösung (a,b) der Ausgangsgleichung, wie eine kurze Probe unter Verwendung von $n^2 = st$ zeigt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{3s}{n(n+s)}+\frac{3t}{n(n+t)} = \frac{3s(n+t)+3t(n+s)}{n(n+s)(n+t)} = \frac{3(sn+st+tn+st)}{n(n^2+nt+ns+st)} = \frac{3}{n}.$$

Nun gilt für jeden Teiler t von n^2, dass $\frac{n^2}{t} \equiv -n \bmod 3 \Leftrightarrow t \equiv -n$; dies folgt aus einer Betrachtung der Primfaktoren $q \equiv -1 \bmod 3$ in der Primfaktorzerlegung von n: Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, schreiben wir die Primfaktorzerlegung von n in der Form $n = \prod_{p\equiv 1 \bmod 3} p^{\alpha(p)} \cdot \prod_{q\equiv -1 \bmod 3} q^{\alpha(q)}$ und es gilt

$$n \equiv 1 \bmod 3 \Leftrightarrow S_u := \sum_{q\equiv -1 \bmod 3} \alpha(q) \text{ gerade und } n \equiv -1 \bmod 3 \Leftrightarrow S_u := \sum_{q\equiv -1 \bmod 3} \alpha(q) \text{ ungerade.}$$

Insbesondere ist $t \neq n$. Da s und t Komplementärteiler sind und $n^2 \equiv 1 \bmod 3$, gilt $\frac{n^2}{s} \equiv \frac{n^2}{t} \equiv -n \bmod 3$, d.h. zu den Paaren (s,t) und (t,s) gehören die als gleich betrachteten Lösungspaar (a,b) und (b,a). Nun folgt schließlich

HS: $A(n)$ = Anzahl der positiven Teiler t von n^2, für die $t < n$ und $t \equiv -n \bmod 3$.

= $\frac{1}{2}$ · Anzahl der positiven Teiler t von n^2, für die $t \equiv -n \bmod 3$.

Bemerkung: Als Nebenergebnis erhalten wir: Eine nicht durch 3 teilbare Zahl besitzt genau dann mindestens eine Darstellung von n, wenn die PFZ von n mindestens eine Primzahl $q \equiv -1 \bmod 3$ enthält.

Für $3|n$ mit $m = {}^{n}/_{3}$ gilt: $\frac{3}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow ab - ma - mb = 0 \Leftrightarrow (a-m)(b-m) = m^2.$ (**),

dann ist $A(n)$ = Anzahl der Teiler t von $\left(\frac{n}{3}\right)^2$ mit $t \leq \left(\frac{n}{3}\right)$.

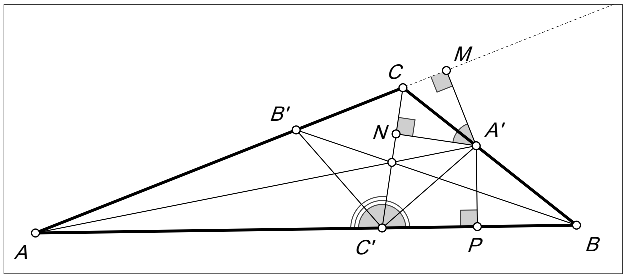
Aufgabe 3: In einem Dreieck ABC sei $\angle ACB = 120°$, und die Innenwinkelhalbierenden durch A, B und C schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in A' bzw. B' bzw. C'.

Wie groß ist der Winkel $\angle A'C'B'$?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Es gilt $\angle A'C'B' = 90°$.

1. Beweis (elementargeometrisch): Die Lotfußpunkte der Lote von A' auf AC, CC' und AB seien mit mit M, N bzw. P bezeichnet.



Nach Voraussetzung ist $\angle ACB = 120°$, ferner halbiert CC' den Winkel $\angle ACB$. Also ist

$$\angle NCA' = {}^1/_2 \cdot 120° = 60°$$
$$= 180° - 120° = \angle A'CM.$$

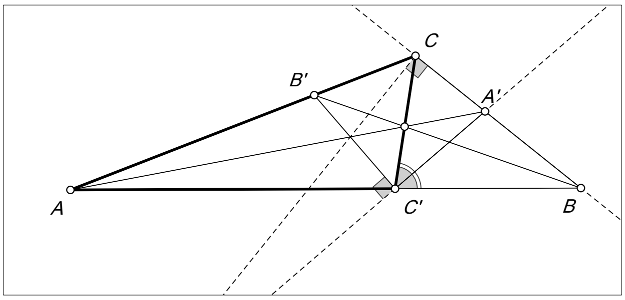
Damit stimmen die rechtwinkligen Dreiecke $A'NC$ und $A'MC$ in zwei Winkeln überein und haben die gemeinsame Seite $A'C$, sind also nach *wsw* kongruent. Insbesondere gilt $\overline{A'M} = \overline{A'N}$.

Weil aber A' auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ liegt, gilt auch $\overline{A'P} = \overline{A'M} = \overline{A'N}$. Es stimmen also die Dreiecke $A'NC'$ und $A'PC'$ in der Länge zweier Seiten und der Weite des rechten Winkels überein, sind also ebenfalls kongruent. Insbesondere gilt also $\angle A'C'N = \angle A'C'P$.

Führt man vom Punkt B' die analoge Überlegung aus, erhält man $\angle B'C'A = \angle B'C'C$. Damit gilt $180° = 2 \cdot \angle A'C'N + 2 \cdot \angle NC'B' = 2 \cdot \angle A'C'B'$. Hieraus folgt sofort $\angle A'C'B' = 90°$; dies war zu zeigen.

Variante 1: Im Teildreieck $AC'C$ ist

$$\angle ACC' = \angle C'CB = 120° : 2 = 60°,$$

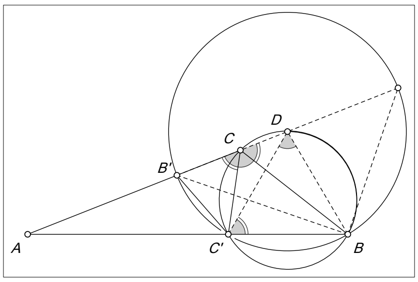


also schließt die Winkelhalbierende von $\angle ACC'$ durch C mit der Geraden CB einen Winkel von $60° : 2 + 60° = 90°$ ein. Damit ist CB Außenwinkelhalbierende und ihr Schnittpunkt mit der Innenwinkelhalbierenden von A ist nach bekanntem Satz der Mittelpunkt des Ankreises an die Seite $C'C$; ferner geht auch die Außenwinkelhalbierende in C' durch diesen Mittelpunkt. Diese muss also die Gerade $C'A'$ sein. Es folgt $\angle BC'A' = \angle A'C'C$. Mit analoger Schlussweise im Teildreieck $CC'B$ erhalten wir $\angle CC'B' = \angle B'C'A$, also $180° = 2 \cdot \angle A'C'C + 2 \cdot \angle CC'B' = 2 \cdot \angle A'C'B'$, also $\angle A'C'B' = 90°$.

Variante 2: (*sin*–Satz): Es ist $\sin(120°) = \sin(180°-120°) = \sin(60°) = \sin({}^{120°}/_2)$. Da CC' Winkelhalbierende im Dreieck ABC ist, ist $\angle ACC' = 60°$. Bekanntlich teilt im Dreieck eine Winkelhalbierende die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten (vgl. Hilfssatz im 3. Beweis), und da es auf der gegenüber liegenden Seite aus nur einen Punkt mit dieser Eigenschaft gibt, gilt auch die Umkehrung. Dies wenden wir zusammen mit *sin*–Satz in den Dreiecken $AC'C$ und ABC an und erhalten

$$\overline{CC'} : \overline{AC'} = \sin(\alpha) : \sin(60°) = \sin(\alpha) : \sin(120°) = \overline{CB} : \overline{BA} = \overline{CB'} : \overline{AB'},$$

also ist CB' Winkelhalbierende im Dreieck $AC'C$. Mit analoger Schlussweise erhalten wir, dass $\angle BC'C$ von $C'A'$ halbiert wird, und so ist $\angle A'C'B' = \angle A'C'C + \angle CC'B' = {}^1/_2 \angle BC'A = {}^1/_2 \cdot 180° = 90°$.



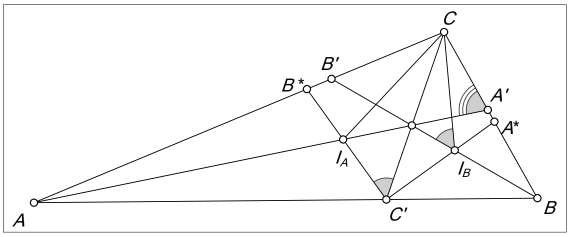
Variante 3 (Apolloniuskreis): Sei D der eindeutig bestimmte Punkt auf der Geraden AC, für den $\overline{DB'} = \overline{DB}$; und sei k der Kreis um D, der B' enthält und damit auch B. Nach bekanntem Satz teilt im Dreieck ABC die Winkelhalbierende von B die Seite AC im Verhältnis $\overline{CB'} : \overline{B'A} = \overline{CB} : \overline{BA}$. Da der MIttelpunkt von k auf der Geraden AC liegt, ist k der Apollonius–Kreis zur Strecke AC mit dem Teilverhältnis $\overline{CB'} : \overline{B'A}$, d.h. für jeden Punkt X auf diesem Kreis gilt $\overline{CX} : \overline{XA} = \overline{CB'} : \overline{B'A} = \overline{CB} : \overline{BA}$.

Weiter ist das Dreieck $B'BD$ gleichschenklig mit Basis $B'B$. Zusammen mit Außenwinkelsatz im Dreieck $AB'B$ folgern wir $\alpha + {}^1/_2\beta = \angle BB'D = \angle DBB' = {}^1/_2\beta + \angle DBC$, also $\angle DBC = \alpha$.

Nun setzen wir $\gamma = 120°$ voraus. Dann gilt $\angle DBA = \alpha + \beta = 180° - 120° = 60°$ (unabhängig von der Lage von C !), außerdem teilen die Geraden CC' und CB den gestreckten Winkel bei C in drei gleich große Winkel zu je 60° auf. Damit haben die Dreiecke $AC'C$ und BDC die gleichen Innenwinkel 60° und α, sind also ähnlich und es gilt $\overline{CD} : \overline{CC'} = \overline{CB} : \overline{CA}$. Hieraus folgt zusammen mit $\angle C'CD = \angle ACB$ nach sws, dass auch die Dreiecke $C'CD$ und ACB ähnlich sind und hieraus $\angle DC'C = \angle BAC = \alpha$.

Dies führt schließlich zur Erkenntnis, dass die Punkte C', C, D und B auf dem gleichen Kreisbogen über der Sehne CD liegen; eine Betrachtung über der Sehne DB dieses Kreisesbogens zeigt, dass $\angle C'DB = C'CB = 60° = \angle DBC'$. Also ist das Dreick $BC'D$ gleichseitig, insbesondere $\overline{DB} = \overline{DC'}$, d.h. C' liegt auch auf dem Apolloniuskreis k. Damit gilt $\overline{CC'} : \overline{C'A} = \overline{CB'} : \overline{B'A}$, d.h. $C'B'$ halbiert den Winkel $CC'A$. Von hier schließen wir wie in Variante 2.

Bemerkung: Interessant, aber für den Beweis nicht weiter wichtig, ist, dass BD Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC im Punkt B ist.



2. Beweis (elementargeometrisch): Zunächst sei γ noch beliebig gewählt (erste Figur). Seien I_A und I_B die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ACC' bzw. BCC', sowie A^* und B^* die Schnittpunkte von $C'I_B$ mit BC bzw. $C'I_A$ mit AC. Dann sind CI_A, $C'I_A$ und AA' die Winkelhalbierenden im Dreieck $AC'C$, diese schneiden sich im Punkt I_A. Entsprechendes gilt für die Winkelhalbierenden CI_B, $C'I_B$ und BB' des Dreiecks BCC' und den Punkt I_B. Außerdem teilen die Geraden CI_A, CC' und CI_B den Winkel γ in vier gleiche Teile. Zusätzliche gilt

$$\angle I_BC'I_A = {}^1/_2\,\angle BC'C + {}^1/_2\,\angle CC'A = {}^1/_2\,\angle BC'A = 90°. \qquad (*)$$

Nun berechnen wir mit dem Satz über die Winkelsumme im Dreiecke einige Winkel in Abhängigkeit von α, β und γ. Nach Satz von der Innenwinkelsumme gilt

im Dreieck $AC'C$: $\angle CC'I_A = {}^1/_2 \cdot (180° - {}^\gamma/_2 - \alpha) = 90° - {}^\gamma/_4 - {}^\alpha/_2$.

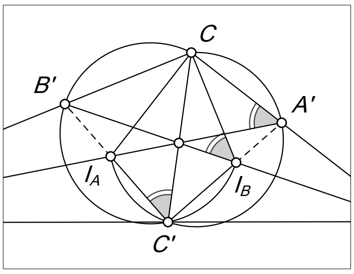
im Dreieck ABB': $\angle CI_BB' = 180° - {}^3/_4\gamma - (\alpha + {}^\beta/_2) = 90° - {}^\gamma/_4 - {}^\alpha/_2$.

im Dreieck $AA'C$: $\angle CA'I_A = \angle CA'A = 180° - \gamma - {}^\alpha/_2$

Für allgemeines γ gilt also $\angle CC'I_A = \angle CI_BB'$ und analog $\angle I_BC'C = \angle A'I_AC$. (**).

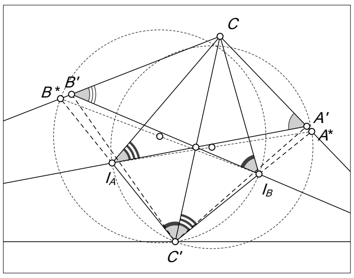
Außerdem: $\angle CA'I_A = \angle CC'I_A \Leftrightarrow 180° - \gamma - {}^\alpha/_2 = 90° - {}^\gamma/_4 - {}^\alpha/_2 \Leftrightarrow \gamma = 120°$. (***)

Nun können wir verschieden schließen:



Variante 1: Wenn also γ = 120°, liegen nach (***) und Umfangswinkelsatz die Punkte A' und C' auf dem gleichen Kreisbogen über der Strecke CI_A, und analog die Punkte C' und B' auf dem gleichen Kreisbogen über der Strecke CI_B. So ergibt sich

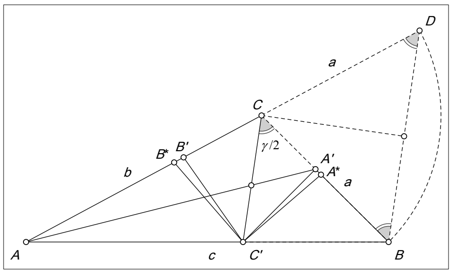
$$\begin{aligned}\angle A'C'B' &= \angle A'C'C + \angle CC'B' \\ &= \angle A'I_AC + \angle CI_BB' && \text{(gem. Sehne } CA' \text{ bzw. } CB'\text{)} \\ &= \angle I_BC'C + \angle CC'I_A && \text{(nach (**))} \\ &= 90° && \text{(nach (*)).}\end{aligned}$$



Variante 2: Es gilt $\angle A^*C'B^* = \angle I_BC'I_A$ = 90°, also genügt es zu zeigen, dass für γ = 120° stets $A^* = A'$ und $B^* = B'$.

Da $\angle A^*C'I_A = I_BC'B^*$ = 90°, liegt C' auf den beiden Thaleskreisen über den Strecken I_AA^* und I_BB^*. Wenn nun zusätzliche γ = 120°, dann ist nach Konstruktion $\angle I_ACA^* = \angle B^*CI_B = {}^3/_4\gamma$ = 90°, d.h. der Punkt C liegt ebenfalls auf diesen beiden Thaleskreisen. Damit liegt A^* auf dem Umkreis des Dreiecks CI_AC'. Im Fall γ = 120° gilt – wie oben hergeleitet – $\angle CA'I_A = \angle CC'I_A$, d.h. nach Umfangswinkelsatz liegt auch A' auf dem Umkreis des Dreiecks CI_AC'. Damit sind C, A' und A^* Schnittpunkte dieses Umkreises mit der Geraden BC. Es kann höchstens zwei solche Schnittpunkte geben, die Punkte A' und A^* sind beide verschieden von C, also $A^* = A'$. Analog schließen wir auf $B^* = B'$, das war zu zeigen.

3. Beweis (Strahlensatz mit mögl. Verallgemeinerung mit *cos*–Funktion): Wir wählen die üblichen Bezeichnungen im Dreieck; zusätzlich seien A^* und B^* die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden von $\angle BC'C$ bzw. $CC'A$ mit der Seite BC bzw. AC. Es gilt nun der bekannte Hilfssatz:



HS Im Dreieck teilt die Winkelhalbierende die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beweis: Wir ergänzen auf der Verlängerung von AC den Punkt D, für den $\overline{CD} = \overline{CB}$ gilt. Im nun gleichschenkligen Dreieck BCD sind die Basiswinkel gleich, d.h. es gilt

$$2\angle CDB = 180° - \angle BCD = 180° - (180° - \gamma),$$

also $\angle CDB = {}^\gamma/_2$.

Nach Stufenwinkelsatz ist $BD \parallel C'C$, nach Strahlensatz mit Zentrum A folgt mit $\overline{BC'} : \overline{AC'} = \overline{DC} : \overline{AC} = a : b$, das beweist die Aussage des HS; und da es genau eine Punkt C' auf AB mit dieser Eigenschaft gibt, gilt auch die Umkehrung. Für die Winkelhalbierenden CC' und AA' erhalten wir so

$$\overline{BC'} = \frac{ac}{a+b} \quad (*) \quad \text{und } AA': \quad \overline{BA'} = \frac{ac}{c+b} \quad (**).$$

Aus der Figur lesen wir zusätzlich ab, dass $\overline{BD} = 2a\cos({}^\gamma/_2)$, zusammen mit $\overline{CC'} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{AD} = b : (a+b)$ gilt also

$$\overline{CC'} = \frac{2ab}{a+b}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \quad (***)$$

Aus dem Hilfssatz folgt im Dreieck $BC'C$ zusammen mit (*) und (***):

$$\overline{BA^*} = \frac{a \cdot \overline{BC'}}{\overline{BC'} + \overline{C'C}} = \frac{a \cdot \dfrac{ac}{a+b}}{\dfrac{ac}{a+b} + 2\cos\dfrac{\gamma}{2}\,\dfrac{ab}{a+b}} = \frac{ac}{c + b \cdot 2\cos\dfrac{\gamma}{2}}. \quad (****)$$

Vergleich von (**) und (****) ergibt: Es gilt $\overline{BA'} = \overline{BA^*} \Leftrightarrow 2\cos({}^\gamma/_2) = 1 \Leftrightarrow \gamma = 120°$, d.h. die Gerade $C'A'$ halbiert genau dann den Winkel $BC'C$, wenn γ = 120°.

Mit analoger Schlussweise im Teildreieck $AC'C$ erhalten wir, dass dann auch die Gerade $C'B'$ den Winkel $CC'A$ halbiert. Also gilt für $\gamma = 120°$:

$$180° = 2 \cdot \angle A'C'C + 2 \cdot \angle CC'B' = 2 \cdot \angle A'C'B', \text{ hieraus folgt sofort } \angle A'C'B' = 90°.$$

Bemerkungen: Es gilt schärfer $\angle B'C'A' = 90° \Leftrightarrow \gamma = 120°$.

Zum Nachweis überlegen wir uns, dass die cos–Funktion in $[0;\pi]$ streng monoton fallend ist, also gilt

$\gamma \geq 120° \Leftrightarrow \overline{BA'} \leq \overline{BA*} \Leftrightarrow \angle BC'A* \leq \angle BC'A'$, wobei Gleichheit immer gleichzeitig auftritt.

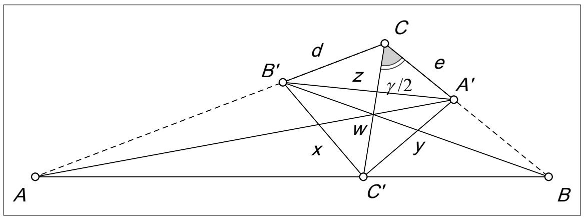
Dies gilt im Dreieck $AC'C$ analog für den Punkt $B*$, also ist auch

$\gamma \geq 120° \Leftrightarrow \overline{BA'} \leq \overline{BA*}$ und $\overline{AB'} \leq \overline{AB*} \Leftrightarrow \angle B*C'A \geq \angle B'C'A \Leftrightarrow \angle A'C'B' \geq 180°:2$,

wobei Gleichheit immer gleichzeitig auftritt.

Der 3. Beweis kann einfacher geführt werden, wenn man von Beginn $\gamma = 120°$ voraussetzt. Dann ist BDC ein gleichseitiges Dreieck, d.h. $\overline{BD} = a$ und man erhält direkt ohne Verwendung der cos–Funktion $\overline{CC'} = \frac{2ab}{a+b}$. Allerdings ist es dann schwieriger, auf das schärfere Ergebnis zu schließen.

4. Beweis (cos–Satzund Satz des Pythagoras): Wir wählen die Bezeichnungen wie in der Figur und werden zeigen, dass aus $\gamma = 120°$ folgt, dass im Dreieck $A'B'C'$ die Beziehung $z^2 = x^2 + y^2$ gilt und somit nach Pythagoras $\angle A'C'B' = 90°$.



Falls $\gamma = 120°$, gilt $cos(\gamma) = -1/2$ und $cos(\gamma/2) = 1/2$, damit gilt in den Dreiecken $B'A'C$, $B'C'C$, $C'A'C$ und ABC nach cos–Satz:

$z^2 = d^2 + e^2 + de$

$x^2 = d^2 + w^2 - dw$

$y^2 = e^2 + w^2 - ew$.

$c^2 = a^2 + b^2 + ab$, also $c^2 - a^2 + c^2 - b^2 = 2c^2 - a^2 - b^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$;

hierbei ist (vgl. 3. Beweis) $d = \frac{ab}{a+c}$, $e = \frac{ab}{b+c}$, $w = \overline{C'C} = 2\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$.

Dies setzen wir zusammen zu:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= d^2 + e^2 + w(w - d + w - e) = d^2 + e^2 + \frac{ab}{a+b}\left(\frac{ab}{a+b} - \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{a+b} - \frac{ab}{b+c}\right) \\
&= d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+b)}\left(\frac{(a+c)-(a+b)}{(a+b)(a+c)} + \frac{(b+c)-(a+b)}{(a+b)(b+c)}\right) \\
&= d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+b)^2}\left(\frac{(c-b)(b+c)+(c-a)(a+c)}{(a+c)(b+c)}\right) \\
&= d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{(c^2-b^2)+(c^2-a^2)}{(b+c)(a+c)}\right) = d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a+c)(b+c)}\right) \\
&= d^2 + e^2 + \frac{(ab)^2}{(a+c)(b+c)} = d^2 + e^2 + de = z^2.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen.

Aufgabe 4: Die Grundfläche einer Pyramide ist ein regelmäßiges n–Eck. Jede Verbindungsstrecke zweier Ecken der Pyramide mit Ausnahme der Seiten der Grundfläche wird entweder rot oder blau gefärbt.

Beweise: Für n = 9 gibt es bei jeder solchen Färbung drei Ecken der Pyramide, die durch drei gleichfarbige Strecken verbunden sind, und für n = 8 gilt dies nicht in jedem Fall.

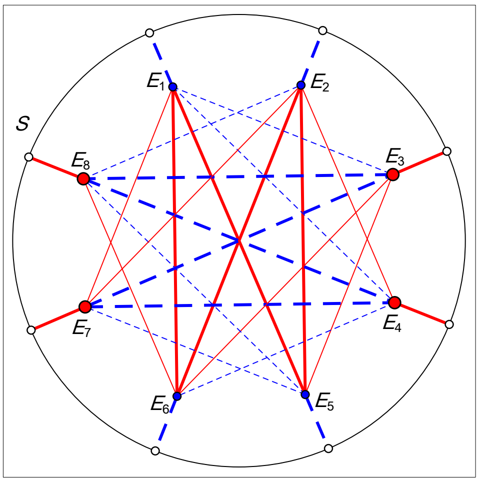
Vorbemerkung: Die Aufgabenstellung unterscheidet gefärbte und ungefärbte Verbindungsstrecken, und unter den gefärbten Verbindungsstrecken nach rot gefärbten und blau gefärbten.

Bezeichnung: Eine Färbung heiße *dreiecksfrei*, wenn es keine drei Ecken gibt, die durch gleichgefärbte Strecken verbunden sind. Ein Tripel von drei Ecken heiße *dreiecksfrei*, wenn von den drei Verbindungsstrecken zwischen diesen Ecken nicht alle drei mit gleicher Farbe gefärbt sind. Verbindungsstrecken zwischen Ecken der Grundfläche, die nicht Seiten sind, nennen wir *Diagonalen*.

1. Beweis: Für n = 9 gibt es keine dreiecksfreie Färbung:

Von der Spitze S der Pyramide gehen 9 Verbindungsstrecken zu den Ecken der Grundfläche. Diese sind alle gefärbt, und nach Schubfachprinzip davon mindestens 5 in der gleichen Farbe, o.B.d.A. sei dies rot. Wir wählen 5 dieser roten Strecken aus und bezeichnen ihre Endpunkte auf der Grundfläche fortlaufend im Uhrzeigersinn mit $F_1, F_2, \ldots, F_5$ (vgl. Figur der Variante unten). Da $n > 5$, gibt es mindestens eine Ecke der Grundfläche, die keine der Ecken F_i ist, und somit ist mindestens eine der Strecken F_1F_2, F_2F_3, F_3F_4, F_4F_5 und F_5F_1 eine echte Diagonale, also gefärbt. O.B.d.A. sei dies die Strecke F_5F_1. Auch die Strecken F_1F_3, F_3F_5 sind sicher Diagonalen, d.h. die drei Punkte F_1, F_3 und F_5 sind durch gefärbte Strecken verbunden.

Falls nun mindestens eine der drei Strecken rot gefärbt ist – o.B.d.A. sei dies F_1F_3 –, sind die drei Ecken F_1, F_3 und S durch gleichfarbige Strecken verbunden, und falls keine der drei Strecken rot gefärbt ist, sind diese drei Strecken blau gefärbt, d.h. die drei Ecken F_1, F_3 und F_5 sind durch gleichfarbige Strecken verbunden. Das war zu zeigen.



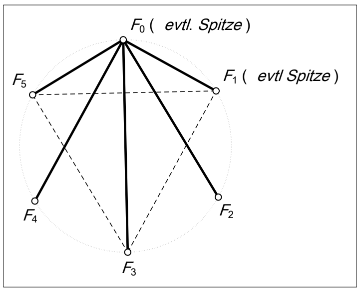
Für $n = 8$ ist in nebenstehender Figur eine dreiecksfreie Färbung angegeben; dabei ist die Spitze S der Pyramide als Kreis dargestellt. (Falls die Figur in schwarz–weiß reproduziert wird: Rote Verbindungsstrecken sind durchgezogen, blaue gestrichelt. In der Überprüfung werden zuerst die dicken, dann die dünnen Linien betrachtet.)

Überprüfung: Zuerst färben wir die Strecken SE_1, SE_2, SE_5, SE_6 und ihre Endpunkte in der Grundfläche blau, die anderen von S ausgehenden Strecken und ihre Endpuntke rot. Anschließend färben wir die Diagonalen zwischen blauen Punkten rot, zwischen roten Punkte blau. Dies sind die dick gezeichneten Strecken in der Figur. Damit sind insgesamt 16 Strecken gefärbt.

In jedem Eckentripel (SE_iE_j), das die Spitze enthält, sind nun entweder die Strecken SE_i und SE_j verschieden gefärbt oder die Strecke SE_i und E_iE_j verschieden gefärbt oder die Strecke E_iE_j ist Seite des n–Ecks und somit ungefärbt. In jedem Fall ist das Tripel (SE_iE_j) dreiecksfrei. Für die weitere Untersuchung genügt es also zu zeigen, dass es keine drei Ecken der Grundfläche gibt, die durch drei gefärbte Strecken der gleichen Farbe verbunden sind.

Bei Betrachten der von einer Ecke ausgehenden gefärbten Strecken bestätigt man schnell, dass die Färbung bei einer Drehung um 180° erhalten bleibt, und dass bei Drehung um 90° jede Farbe durch die Gegenfarbe ersetzt wird. So genügt es, die Färbung für Dreiecke zu überprüfen, die die Ecken E_1 oder E_2 enthalten, dies ist in annehmbarer Zeit ohne weitere Hilfsmittel möglich.

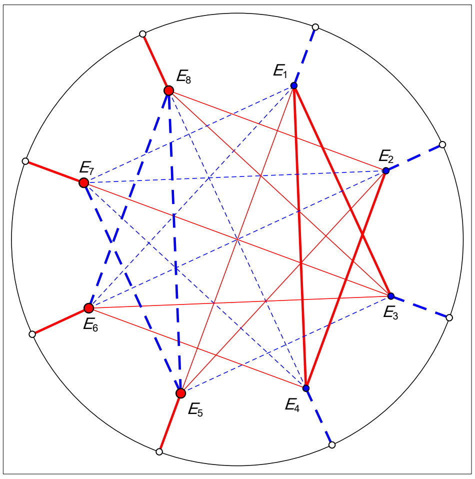
Variante (allgemeiner): Wir beweisen folgenden Hilfssatz:



HS: Wenn von einer Ecke der Pyramide mit einer n–eckigen Grundfläche mit $n \geq 6$ mindestens 5 gleichgefärbte Verbindungsstrecken ausgehen, dann existiert mindestens ein Dreieck, dessen Seiten gleich gefärbt sind.

Beweis: O.B.d.A. seien die 5 von der Ecke F_0 ausgehenden Strecken blau gefärbt. Die Endpunkte dieser Strecken seien so mit $F_1, F_2, \ldots, F_5$ bezeichnet, dass keine der Strecken F_1F_3, F_3F_5 und F_5F_1 Seiten des n – Ecks sind. Da $n \geq 6$ gilt, ist dies ist immer möglich: Falls alle Punkte F_i Ecken der Grundfläche sind oder F_1 Spitze der Pyramide ist, wird dies aus der Figur klar, und falls F_0 Spitze der Pyramide ist, wählen wir die Indices so, dass zwischen F_5 und F_1 eine Ecke der Grundfläche liegt, die kein Endpunkt der 5 von F_0 ausgehenden gefärbten Strecken ist. Nun sind entweder diese 3 Strecken alle rot gefärbt, dann sind die Punkte F_1, F_3 und F_5 durch Strecken gleicher Farbe verbunden, oder mindestens eine davon ist blau gefärbt, dann sind ihre Endpunkte und F_0 untereinander durch Strecken gleicher Farbe verbunden. Das war zu zeigen. Nun zum eigentlichen Beweis:

Für $n = 9$ gehen von der Spitze 9 gefärbte Verbindungsstrecken zu den Ecken der Grundfläche, davon nach Schubfachprinzip mindestens 5 mit der gleicher Farbe. Damit existiert nach HS ein gleichgefärbtes Dreieck.



Für $n = 8$ gibt nebenstehende Figur eine dreiecksfreie Färbung an. Nach HS können wir folgende Aussagen treffen, die die Suche nach einer dreiecksfreien Färbung erleichtert:

Von der Spitze gehen 8 zu färbende Strecken aus, nach HS müssen davon 4 rot und 4 blau gefärbt sein, ihre Endpunkte in der Grundfläche färben wir in gleicher Farbe. Nun dürfen die 4 roten Endpunkte untereindander nur durch nicht–gefärbte Strecken oder durch blau gefärbte Strecken verbunden sein. Von den blau gefärbten Strecken dürfen keine drei ein Dreieck bilden. Damit sind die vier roten Ecken entweder wie in obiger Figur angeordnet oder wie in nebenstehender Figur, nämlich direkt benachbart. Dann sind die Färbungen der dick eingezeichneten Linien E_1E_3, E_1E_4, E_2E_4 sowie E_5E_7, E_5E_8, E_6E_8 vorgegeben.

Wären im Quadrat $E_1E_3E_5E_7$ mit der roten Strecke E_1E_3 und der blauen Strecke E_5E_7 die beiden übrigen Seiten E_3E_5 und E_7E_1 verschieden, so könnten die Diagonalen E_1E_5 und E_3E_7 nicht gefärbt werden ohne dass ein gleichgefärbtes Dreieck entstünde. Analoges gilt im Quadrat $E_2E_4E_6E_8$. Beide Färbungen sind jeweils möglich; für die Strecken E_3E_6 und E_2E_7 ergeben sich bei der gewählten Variante jeweils zwei Möglichkeiten. Von jeder Ecke der Grundfläche gehen 5 Diagonalen aus; nach HS können diese nicht alle mit der gleichen Farbe gefärbt werden.