BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2021

Vorläufige Fassung
für
die Homepage

» KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT

» BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: September 2021

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Für eine positive ganze Zahl m bezeichnen wir mit $Q(m)$ die Quersumme von m, also die Summe aller Ziffern ihrer Darstellung im Dezimalsystem.

Beweise: Jede positive ganze Zahl k besitzt ein positives Vielfaches n, für das $Q(n) = Q(n^2)$ gilt.

1. Beweis: Für die Zahl $m = m(r,s) := 10^r\cdot(10^s - 1) = \underbrace{99...9}_{s}\underbrace{00...0}_{r}$ ist

$$m^2 = 10^{2r}\cdot(10^s - 1)^2 = 10^{2r+2s} - 2\cdot 10^{2r+s} + 10^{2r} = \underbrace{99...9}_{s-1}8\underbrace{00...0}_{s-1}1\underbrace{00...0}_{2r}.$$

Offensichtlich gilt $Q(m) = 9s = Q(m^2)$.

Es genügt also nachzuweisen, dass es zu jeder Zahl k ein Vielfaches n der Form $n = m(r,s)$ gibt. Ein solches Vielfaches konstruieren wir wie folgt: Zu einem gegebenen k betrachten wir die Reste, die 10^r (mit $r = 0, 1, 2, 3$ ...) bei Division durch n lässt. Da es nur k verschiedene Reste geben kann, gibt es zwei verschiedene Potenzen 10^r und 10^{r+s}, für die diese Reste gleich sind. Dann ist aber ihre Differenz $10^{r+s} - 10^r = 10^r\cdot(10^s - 1) = m(r,s)$ ein Vielfaches von k.

Variante (Euler−Fermat): Seien 2^u und 5^v die höchsten Potenzen von 2 bzw. 5, die k teilen und $k^* := k : (2^u\cdot 5^v)$. Dann ist $ggT(10,k^*) = 1$ und im Internet finden wir den Satz von Euler−Fermat, der besagt, dass dann $10^{\varphi(k^*)} - 1 \equiv 0 \mod k^*$ gilt, wobei $\varphi(k^*)$ die Anzahl der zu k^* teilerfremden Zahlen im Intervall $[1, k^*]$ angibt. Auch wenn wir das nicht im Detail verstehen, können wir – allein mit der Kenntnis, dass $\varphi(k^*)$ positiv ganzzahlig ist − hieraus folgern, dass es ein Vielfaches von k^* der Form $K^* = 10^{\varphi(k^*)} - 1 = 99...9$ gibt. Nun ist $K := K^*\cdot 10^{max(u,v)}$ ein Vielfaches von $k = k^*\cdot(2^u\cdot 5^v)$ und hat die Form 99...900...0; das Quadrat dieser Zahl hat – wie oben gezeigt – die gleiche Quersumme.

2. Beweis: (analoge Argumentation zu 1. Beweis mit anderer Zahlenreihe). Für $t = 1, 2, ...$ sei $r(t) := \sum_{0\le j\le t-1} 10^j = \underbrace{11...1}_{t}$. Dann ist nach bekannter Summenformel

$$18\cdot r(t) = 18\cdot\frac{10^t - 1}{10 - 1} = 2\cdot 10^t - 2 = 1\underbrace{99...9}_{t-1}8 \quad \text{mit } Q(18\cdot r(t)) = 9t, \text{ und}$$

$$[18\cdot r(t)]^2 = (2\cdot 10^t - 2)^2 = 4\cdot 10^{2t} - 8\cdot 10^t + 4 = 3\underbrace{9...9}_{t-1}2\underbrace{0...0}_{t-1}4 \quad \text{mit } Q([18\cdot r(t)]^2) = 9t,$$

also $Q(18\cdot r(t)) = Q((18\cdot r(t))^2)$. Eine Multiplikation mit einer Zehnerpotenz ändert nichts an den Quersummen, d.h. für alle w gilt $Q(18\cdot r(t)\cdot 10^w) = Q((18\cdot r(t)\cdot 10^w)^2)$.

Für ein beliebiges k sei $k^* = k : (2^u\cdot 5^v)$, wobei 2^u und 5^v die höchsten Potenzen von 2 bzw. 5 sind, die k teilen. Dann betrachten wir die Reste, die die Zahlen $r(t)$ bei Division durch k^* lassen. Da es nur k^* verschiedene solche Reste gibt, gibt es zwei Zahlen $r(s)$ und $r(t + s)$, für die diese Reste gleich sind. Dann ist ihre Differenz durch k^* teilbar, d.h. die Zahl $r(t + s) - r(s) = \underbrace{11...1}_{t}\underbrace{00...0}_{s} = r(k)\cdot 10^s$ ist Vielfaches von k^*. Damit ist auch $18\cdot r(t)\cdot 10^s$ ein Vielfaches von k^*, und damit $18\cdot r(t)\cdot 10^{s+max(u,v)}$ ein Vielfaches von k. Wie oben gezeigt gilt dann $Q(18\cdot r(t)\cdot 10^{s+max(u,v)}) = Q((18\cdot r(t)\cdot 10^{s+max(u,v)})^2)$.

Bemerkung: Der Ansatz $k = 9r(t)\cdot 10^{s+max(u,v)}$ führt zur Zahlenreihe des 1. Beweises.

Bemerkung: Die Folge der Zahlen m mit $Q(m) = Q(m^2)$ findet man unter *http://oeis.org/A58369*. Hieraus kann man weitere Zahlenreihen $m(t)$ konstruieren, für die mit $Q(m(t)) = Q(m(t)^2)$ und mit denen sich auf analoge Art Nachweise führen lassen:

$$(2\cdot10^t-1)^2 = 4\cdot10^{2t}-4\cdot10^t+1 = 19\underset{t}{9\ldots}9^2 = 39\underset{t-1}{\ldots}960\underset{t-1}{\ldots}01$$

$$(2\cdot10^t-2)^2 = 4\cdot10^{2t}-8\cdot10^t+4 = 199\underset{t-1}{\ldots}98^2 = 39\underset{t-1}{\ldots}920\underset{t-1}{\ldots}04 = (18\cdot11\underset{t}{\ldots}1)^2$$

$$(10^t-45)^2 = 10^{2t}-90\cdot10^t+2025 = 99\underset{t-2}{\ldots}955^2 = 9\underset{t-2}{\ldots}910\underset{t-2}{\ldots}02025 = (5\cdot199\underset{t}{\ldots}91)^2$$

$$(9\cdot10^t-45)^2 = 81\cdot10^{2t}-810\cdot10^t+2025 = 89\underset{t-2}{\ldots}955^2 = 809\underset{t-3}{\ldots}9190\underset{t-3}{\ldots}02025$$

$$(10^{(1+2t)}+10^{(1+t)}-1)^2 = 10\underset{t}{\ldots}09\underset{t+1}{\ldots}9^2 = 10\underset{t-1}{\ldots}020\underset{t}{\ldots}079\underset{t-1}{\ldots}980\underset{t}{\ldots}01$$

$$(10^{(1+2t)}+10^{(1+t)}-2)^2 = 10\underset{t}{\ldots}09\underset{t}{\ldots}98^2 = 10\underset{t-1}{\ldots}020\underset{t}{\ldots}059\underset{t-1}{\ldots}960\underset{t}{\ldots}04.$$

z.B. $10^k-45 = 5\cdot199\underset{k-2}{\ldots}91$. Dann gibt es t,s so, dass die Differenz $199\underset{t}{\ldots}91 - 199\underset{s}{\ldots}91 = 199\underset{t-s-1}{\ldots}98\,00\underset{s+1}{\ldots}0$ ein Vielfaches von k^* ist; damit ist $199\underset{t-s-1}{\ldots}98\;\;00\underset{s+1+\max(u,v)}{\ldots}0$ ein Vielfaches von k mit der gesuchten Eigenschaft.

Bemerkung: Die Zahl (10^s-1) enthält keinen Faktor 2 und keinen Faktor 5. Wenn k ebenfalls keinen Faktor 2 und keinen Faktor 5 enthält, dann ist im Produkt $n = kt = 10^r\cdot(10^s-1)$ wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung jeder Teiler 2 und jeder Teiler 5 in t enthalten, d.h. 10^r ist Teiler von t. Mit $t^* = t : 10^r$ gilt also $t^*\cdot k = (10^s-1) = 99\ldots9$. Hieraus kann man mit Schulmethoden ablesen, dass jeder Bruch aus ganzen Zahlen, dessen Nenner k in der gekürzten Form keinen Faktor 2 und keinen Faktor 5 enthält, eine reinperiodische Dezimalbruchentwicklung hat und dass die Länge der Periode eine Teiler von s ist.

Aufgabe 2: In eine Schule gehen 2021 Kinder, von denen jedes mindestens 45 andere Kinder dieser Schule kennt.

Beweise: Es gibt in dieser Schule vier Kinder, die sich so um einen runden Tisch setzen können, dass jedes Kind seine beiden Nachbarn kennt.

Hinweis: "Bekanntschaft" ist immer gegenseitig.

1. Beweis: Es kann nicht jedes Kind genau 45 andere Kinder kennen, da dann die Gesamtzahl der Bekanntschaften $^1/_2 \cdot (2021 \cdot 45)$ keine ganze Zahl wäre. Also kennt mindestens ein Kind – nennen wir es Alfons − mindestens 46 verschiedene andere Kinder. Von diesen 46 Kindern kennt jedes den Alfons und nach Voraussetzung noch mindestens 44 weitere Kinder. Diese können aber nicht alle verschieden sein, da $46 \cdot 44 = 2024 > 2021 - 1$ ist. Also kennen zwei verschiedene dieser 46 Kinder – wir nennen sie Berta und Carola – beide ein weiteres Kind, das Dieter heißen möge. Nun setzen wir Alfons, Berta, Dieter und Carola in dieser Reihenfolge um den Tisch, dann ist die Bedingung, dass jedes Kind seine beiden Nachbarn kennt, erfüllt.

Variante: Dass die Anzahl der Bekanntschaften gerade sein muss, beweisen wir mit Hilfe des

"**Handschüttelsatz**": In jeder Gruppe ist die Anzahl der Leute, die eine ungerade Anzahl von 'handshakes' mit Mitgliedern dieser Gruppe hinter sich haben, gerade.

Beweis ("unvollständige Induktion") Wir nehmen an, die Gesamtzahl an 'handshakes' in der Gruppe sei n. Wir ordnen sie in zeitlicher Reihenfolge, wobei wir o.B.d.A. annehmen können, dass keine zwei 'handshakes' gleichzeitig stattfinden, und bezeichnen sie gemäß dieser Reihenfolge mit h_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Mit A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sei die Anzahl der Personen bezeichnet, die nach dem i−ten 'handshake' eine ungerade Anzahl von 'handshakes' hinter sich haben.

Nach dem ersten 'handshake' ist $A_1 = 2$, also gerade, und für alle $i \geq 1$ gilt $A_{i+1} = A_i + 2$ oder $A_{i+1} = A_i$ oder $A_{i+1} = A_i - 2$, je nachdem ob von den beiden beim $(i + 1)$−ten 'handshake' beteiligten Personen vor diesem 'handshake' keine oder genau eine oder beide eine ungerade Anzahl von 'handshakes' hinter sich haben. In jedem Fall hat A_{i+1} die gleiche Parität wie A_i. Durch wiederholte Anwendung gilt dies dann für alle $i = 1, 2, \dots, n$.

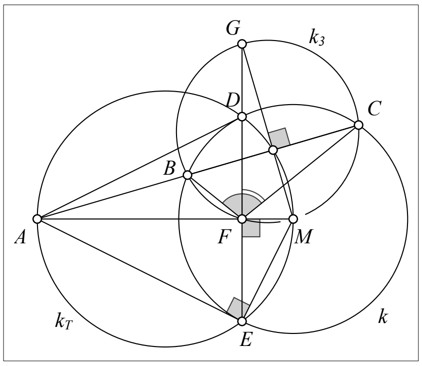
Nun wenden wir den Handschüttelsatz an: Wenn nun jedes der 2021 Kinder genau 45 Bekannte hätte und jede Bekanntschaft mit genau einem 'handshake' besiegelt hätte, dann hätte jedes dieser Kinder eine ungerade Anzahl von 'handshakes' hinter sich. Dann müsste die Anzahl der Kinder gerade sein, im Widerspruch dazu ist 2021 ungerade.

Aufgabe 3: Gegeben sei ein Kreis k und ein Punkt A außerhalb von k. Durch A werden drei Geraden gezogen: eine Sekante, die den Kreis k in B und C schneidet, und zwei Tangenten, die den Kreis k in D bzw. E berühren. Der Mittelpunkt der Strecke DE sei F.

Beweise: Die Gerade DE halbiert den Winkel $\angle BFC$.

Vorbemerkung: Wenn M auf der Geraden BC liegt, dann ist offensichtlich $\angle CFD = \angle DFB = 90$, d.h. die Gerade DE halbiert den Winkel $\angle BFC$. Im Folgenden gehen wir stets davon aus, dass M nicht auf BC liegt.

1. Beweis (Kathetensatz/Sehnen−Tangentensatz): Sei M der Mittelpunkt des Kreises k, sei k_T der Thaleskreis über der Strecke AM. Nach bekannter Tangentenberührpunktkonstruktion sind D und E die Schnittpunkte der Kreise k und k_T. Aus Symmetriegründen ist ferner $AM \perp DE$ und F der Schnittpunkt von AM und DE. Schließlich sei k_3 der Umkreis des Dreiecks BCF, es ist also BC gemeinsame Sehne der Kreise k und k_3. Nun gilt



$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AE}^{\,2}$ (Sehnen−Tangentensatz im Kreis k)

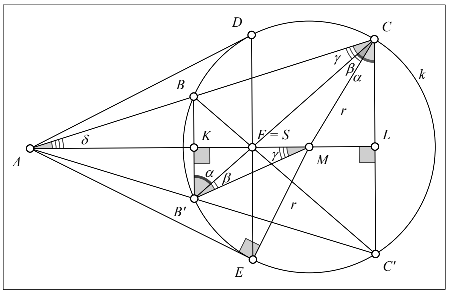
$= \overline{AF} \cdot \overline{AM}$ (Kathetensatz im rechtw. Dreieck AEM)

$\Rightarrow$ M liegt auf k_3 (Sehnen−Tangentensatz in k_3).

Die Punkte B und C liegen auf k, also ist $\overline{MB} = \overline{MC}$. Damit ist die Sehne durch M, die senkrecht auf der Sehne BC des Kreises k_3 steht, ein Durchmesser MG von k_3. Der Endpunkt G muss auf DE liegen, da MG gleichzeitig Durchmesser des Thaleskreises für den rechten Winkel $\angle MFG$ ist. Weiter ist das Dreieck BGC gleichschenklig mit $\overline{BG} = \overline{GC}$. Damit ist im Kreis k_3 nach Umfangswinkelsatz $\angle DFB = \angle GFB = \angle CFG = \angle CFD$, das war zu zeigen.

2. Beweis: Seien M und r der Mittelpunkt und Radius des Kreises k, ferner seien B' und C' die Bilder von B und C bei Spiegelung an AM. Dann ist $B'C'CB$ ein bezüglich MA achsensymmetrisches Trapez und $BB' \parallel CC' \parallel DE$; diese drei Geraden stehen aus Symmetriegründen alle senkrecht auf AM. Sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $B'C$ und BC'. Es genügt nun nachzuweisen, dass die Diagonalen dieses Trapezes sich in F schneiden, weil dann $\angle CFD = \angle CSD = \angle B'SE = \angle DSB = \angle DFB$ (Scheitelwinkel und Symmetrie). Für diesen Nachweis geben wir zwei Varianten:

Variante 1: Seien K und L die Schnittpunkte von AM mit BB' bzw. CC'. Nun ist $\alpha := \angle CB'B = \angle B'CC'$ (Wechselwinkel), $\beta := \angle MB'C = \angle B'CM$ (gleichschenkliges Dreieck $B'MC$ mit $B'M = MC = r$), $\gamma := AMB' = \angle ACB'$ (halber Mittelpunktswinkel für Winkel $\angle BCB'$ über der Sehne $B'B$ im Kreis k). Mit $\delta := \angle MAC$ und Satz von der Innenwinkelsumme gilt



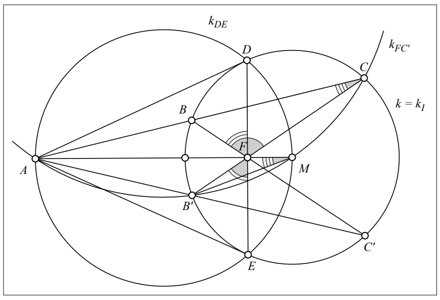
im Dreieck LAC : $180° = 90° + \alpha + \gamma + \delta$,

im Dreieck KMB : $180° = 90° + \alpha + \beta + \gamma$,

woraus wir $\beta = \delta$ schließen. Damit stimmen in den Dreiecken SMC und CMA nicht nur die Innenwinkel bei M überein, sondern auch die Innenwinkel bei C bzw. A. Sie sind also ähnlich und damit gilt $\overline{SM} : r = r : \overline{AM}$, also $\overline{SM} = r^2 : \overline{AM}$.

Nun betrachten wir das Dreieck AEM. Weil der Berührradius senkrecht auf der Tangente steht, ist es rechtwinklig bei E und EF ist Höhe von E. Also gilt mit Kathetensatz $r^2 = \overline{FM} \cdot \overline{AM}$, also $\overline{FM} = r^2 : \overline{AM}$

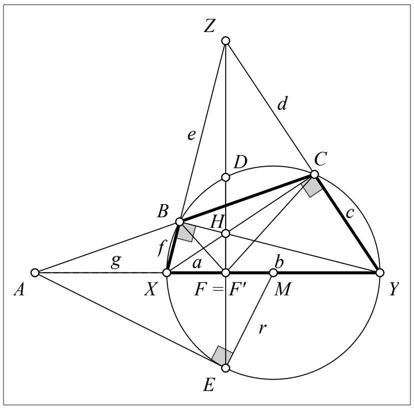
Also ist $\overline{SM} = \overline{FM}$, und da S und F beide zwischen A und M liegen, ist $S = F$. Das war zu zeigen.



Variante 2 (mit Inversion am Kreis): Wir zeigen, dass B' auf der Geraden CF liegt, indem wir zeigen, dass nach einer Inversion am Kreis k der Punkt B' − er ist identisch mit seinem Bild − auf dem Bild der Geraden FC liegt.

Die in der Aufgabenstellung vorgegebene Konstruktion des Punktes F aus dem Punkt A und dem Kreis k ist eine der bekannten Möglichkeiten, den Bildpunkt F des Punktes A bei Inversion am Kreis k zu konstruieren; damit ist auch A der Bildpunkt von F. Der Punkt C liegt auf k, wird also auf sich selbst abgebildet. Damit ist nach bekannten Eigenschaften der Inversion das Bild der Geraden FC der Kreis k_{FC} durch A, M und C'.

Nun schließen wir mit Umfangswinkelsatz und seiner Umkehrung: Über dem Bogen BB' im Kreis k gilt $\angle ACB' = \angle BCB' = {}^1/_2\angle BMB' = \angle AMB'$, und hieraus folgt dass B' auf dem Kreisbogen über A, M und C liegt, also dem Bild der Geraden FC. Das war zu zeigen.



3. Beweis: (Zwei Grundkonstruktionen zur harmonischen Teilung): O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Punkte A, E, D, B und C so angeordnet sind wie in der Figur; wenn nicht, vertauschen wir in der folgenden Argumentation E und D und/oder B und C.

Sei M der Mittelpunkt des Kreises k und r sein Radius. Weiter seien X und Y die Schnittpunkte von AM mit k, wobei die Bezeichnungen so gewählt seien, dass X zwischen A und M liegt. Ferner seien H der Schnittpunkt der Geraden YB und XC, Z der Schnittpunkt der Geraden XB mit YC und schließlich F' der Schnittpunkt von ZH mit XY. Es sei noch bemerkt, dass F und F' nach Vorgabe von A, k, und B eindeutig bestimmt sind. Die Existenz dieser Punkte ist auch gesichert, da A außerhalb und M innerhalb von k liegen und die Winkel $\angle YXB$ und $\angle CYX$ beide spitz sind.

Wir zeigen zunächst, dass $F = F'$, indem wir nachweisen, dass sowohl F als auch F' die Strecke XY im gleichen Verhältnis innen wie der Punkt A außen teilt, d.h. dass F und F' beide mit A, X und Y harmonisch liegen, bzw. dass $F = F'$ der eindeutig bestimmte Punkt auf AM ist, für den $XF : FY = XA : AY$ gilt.

1. zu F: Aus Symmetriegründen ist $DE \perp AM$, also ist EF Höhe von E im Dreieck AEM. Weiter steht der Berührradius senkrecht auf der Tangente, also ist das Dreieck AEM rechtwinklig bei E. Nun gilt nach Kathetensatz

$$
\begin{aligned}
\angle MEA = 90° \quad &\Leftrightarrow \quad r^2 = \overline{FM}\cdot\overline{AM} \quad \Leftrightarrow \quad 2r^2 = 2\cdot\overline{FM}\cdot\overline{AM}\\
&\Leftrightarrow \quad r\,\overline{AM} - r\,\overline{FM} - \overline{FM}\cdot\overline{AM} + r^2 = \overline{FM}\cdot\overline{AM} + r\,\overline{AM} - r\,\overline{FM} - r^2\\
&\Leftrightarrow \quad (\overline{AM} + r)(r - \overline{FM}) = (\overline{AM} - r)(\overline{FM} + r)\\
&\Leftrightarrow \quad \overline{AY}\cdot\overline{XF} = \overline{AX}\cdot\overline{FY}\\
&\Leftrightarrow \quad \overline{XF} : \overline{FY} = \overline{AX} : \overline{AY}\,.
\end{aligned}
$$

d.h. der Punkt F teilt die Strecke XY innen im gleichen Verhältnis wie der Punkt A außen.

2. zu F': (Die Überlegung in diesem Absatz gilt für beliebige von A verschiedene Punkte B und C, die nicht auf AM liegen, aber kollinear mit A sind.) Das Dreieck XYZ hat drei Transversalen ZF', YB und XC, die durch einen gemeinsamen Punkt H gehen. Die drei Transversalen bestimmen auf den Seiten des Dreiecks Abschnitte der Länge a, b, c, d, e und f wie in der Figur angegeben. Dann gilt mit Satz von Ceva $(ace) : (bdf) = 1$. Weiter betrachten wir die Gerade BC; sie schneidet die Seiten XZ und YZ des Dreiecks XYZ und geht durch den Punkt A auf der Geraden XY. Sie bestimmt auf den Seiten XZ und YZ die oben genannte Abschnitte und zusätzlich auf der Geraden AY den Abschnitt g. Mit Satz von Menelaos gilt $[(g{+}a{+}b)fd] : [(a{+}b)ec]$. Gleichsetzen der linken Seiten ergibt sofort $b : a = (g{+}a{+}b) : (a{+}b)$, d.h. der Punkt F' teilt die Strecke XY innen im gleichen Verhältnis wie der Punkt A außen.

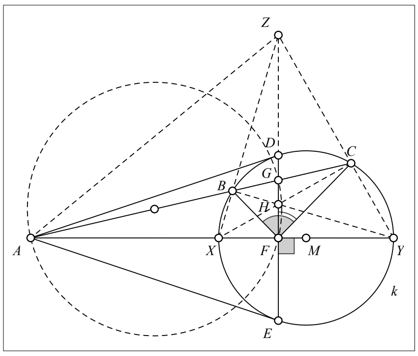
Nun benützen wir noch die Tatsache, dass B und C auf dem Kreis k liegen: Dieser Kreis ist Thaleskreis über XY, also sind B und C die Fußpunkte der Höhen von Y und X im Dreieck XYZ, also ist H der

Höhenschnittpunkt. Da in jedem Dreieck sich die drei Höhen in einem Punkt schneiden, ist ZH ebenfalls Höhe und F' ist ihr Fußpunkt. Da nun $F' = F$, $ZF' \perp AM$ und $EF \perp AM$, sind die Punkte E, F, H, D und Z kollinear und das Dreieck BCF ist das Höhenfußpunktdreieck im Dreieck XYZ. Nach bekanntem Lehrsatz (oder kurzem Beweis anschließend) sind die Höhen jedes Dreiecks die Winkelhalbierenden seines Höhenfußpunktdreiecks, das war zu zeigen.

Beweis des Lehrsatzes: Die Vierecke $XFHB$ und $FYCH$ sind Sehnenvierecke, da die gegenüberliegenden Winkel bei F und B bzw. F und C je 90° sind. Dann gilt mit Umfangswinkelsatz über den Sehnen XB bzw. YC:

$$\angle BFX = \angle BHX = \angle YCH = \angle YFC, \text{ also } \angle ZFB = 90° - \angle BFX = 90° - \angle CFY = \angle CFZ.$$

4. Beweis (projektive Geometrie): O.B.d.A. liege B zwischen A und C (andernfalls vertausche man im folgenden Beweis die Bezeichnungen B und C).



Die Schnittpunkte von AM mit k bezeichnen wir mit X und Y in der Weise, dass A, X, F und Y in dieser Reihenfolge auf der Geraden AM liegen. Nach bekannter Konstruktion teilt F die Strecke XY innen im gleichen Verhältnis wie A die Strecke XY außen, d.h. die vier Punkte X, Y, A und F liegen harmonisch.

Sei Z der Schnittpunkt von XB und YC sowie H der Schnittpunkt von XB und YC. Da der Kreis k der Thaleskreis über XY ist, sind XC und YB Höhen im Dreieck XYZ. Damit ist ZH ebenfalls Höhe im Dreieck XYZ, also $ZH \perp YX$.

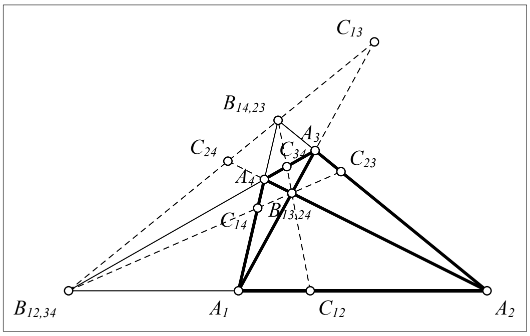
Die Geraden XY und BC schneiden sich in A, die Geraden XB und YC in Z, die Geraden XC und BY in H. Damit ergänzen die Punkte A, Z und H das Viereck $YBCX$ zum vollständigen Vierseit. Nach bekanntem Lehrsatz (vgl. Bemerkung zum 2. Beweis) ist der Schnittpunkt einer Verbindungsgerade von zwei dieser Ergänzungspunkte mit einer Seite dieses Vierseits der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten des Vierseits auf dieser Seite. Dies wenden wir auf ZH an: Der Schnittpunkt mit YX ist der vierte harmonischen Punkt zu X, Y und A; und da dieser eindeutig bestimmt ist, ist dieser Schnittpunkt der Punkt F. Also sind die Punkte Z, H, F, D und E kollinear.

Nun können wir verschieden schließen:

Variante 1: Also ist F identisch mit dem Höhenfußpunkt der Höhe von Z; und somit ist BCF das Höhenfußpunktdreieck im Dreieck XYZ. Nach ebenfalls bekanntem Lehrsatz sind die Höhen des Umgebungsdreiecks die Winkelhalbierenden im Höhenfußpunktdreieck, insbesondere halbiert ZH den Winkel $\angle BFC$.

Variante 2: Sei G der Schnittpunkt von AB mit DE. Weil Y, F, X und A harmonisch liegen, ist das 4−Tupel der vier Geraden YZ, FZ, XZ und AZ ein harmonisches Geradenbüschel, d.h. die vier Punkte B, G, C und A liegen harmonisch. Also ist $\overline{BG} : \overline{GC} = \overline{BA} : \overline{AC}$, bekanntlich kann in dieser Gleichung der Punkt G durch jeden Punkt auf dem Thaleskreis über der Strecke GA ersetzt werden. Weil $\angle GFA = 90°$, ist F ein solcher Punkt, also gilt $\overline{BG} : \overline{GC} = \overline{BF} : \overline{FC}$. Dies ist bekanntlich ein Kriterium dafür, dass die Gerade FG – sie ist identisch mit DE − den Winkel $\angle BFC$ halbiert.

Bemerkung: Zu vier vorgegebenen Punkten A_1, A_2, A_3 und A_4 gibt es sechs Verbindungsgeraden g_i, die sich außer in den Punkten A_j noch in drei weiteren (evtl. unendlich fernen) Punkten B_k schneiden (dünne Linien). Eine solche Punkt- Geraden-Konstellation nennt man **vollständiges Vierseit**. Die drei Verbindungsgeraden h_j unter diesen drei Punkten B_j schneiden die sechs Geraden g_i in sechs weiteren Punkte C_l (gestrichelte Linien). Nun liegen auf jeder Geraden g_i und h_j vier Punkte. Man kann zeigen, dass diese Punktequadrupel alle harmonisch liegen und hat so eine Möglichkeit, zu



einer Strecke und einem Teilungspunkt den vierten harmonisch liegenden Punkt allein mit dem Lineal zu konstruieren. Übrigens liegen auch immer drei der Punkte C_l auf einer Geraden. Bei geeigneter Interpretation gelten diese Aussagen auch, wenn manche der betrachteten Geraden parallel sind, d.h. wenn manche der Schnittpunkte "unendlich fern" liegen. Eine Suche im Internet unter den Stichworten "Vierseit harmonisch" ergibt zahlreiche Hinweise auf Skripte von ausreichender Qualität, z.B.

https://people.math.ethz.ch/~halorenz/publications/pdf/extract.pdf

Im zweiten Beweis haben wir mit dieser Konstruktion ausgehend von den Punkten A, X, Y den Punkt F' konstruiert und den Nachweis geführt, dass diese vier Punkte harmonisch liegen.

Aufgabe 4: In einer Ebene mit kartesischem Koordinatensystem nennen wir eine Strecke *zahm*, wenn sie parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen ist und von dieser ganzzahligen Abstand hat, andernfalls nennen wir sie *wild*.

Es seien m und n ungerade positive ganze Zahlen. Ein Rechteck mit den Eckpunkten (0,0), $(m,0)$, (m,n) und $(0,n)$ wird mit endlich vielen Dreiecken lückenlos und überlappungsfrei bedeckt. Die Menge dieser Dreiecke sei M. Es sind folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Jedes solche Dreieck besitzt wenigstens eine zahme Seite.
(2) Zu jeder zahmen Seite eines Dreiecks aus M hat die zugehörige Höhe die Länge 1.
(3) Jede wilde Seite eines Dreiecks aus M ist gemeinsame Seite von genau zwei Dreiecken aus M.

Beweise: Mindestens zwei dieser Dreiecke haben je zwei zahme Seiten.

Bezeichnungen: Mit Gitterlinie bezeichnen wir eine Gerade, die parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen ist und von ihr einen ganzzahligen Abstand hat, die Schnittpunkte der Gitterlinien nennen wir Gitterpunkte. Benachbarte Gitterpunkte definieren Quadrate, die wir Einheitsquadrate nennen. Mit Mittelgitterlinie bezeichnen wir eine Gerade, die Mittelparallele zwischen zwei Gitterlinien ist, also von diesen beiden Gitterlinien den Abstand 0,5 hat.

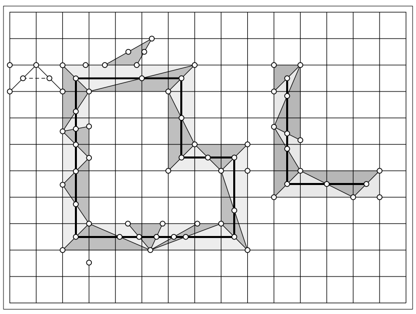
Wenn wir von einem Dreieck reden, ist stets ein Dreieck aus M gemeint.

Es gibt kein Dreieck mit drei zahmen Seiten, da höchstens zwei Dreieckseiten parallel zu einer der Koordinatenachsen sein kann; und wegen (1) gibt es auch kein Dreieck ohne zahme Seite. Also können wir die Dreiecke unterteilen in solche mit genau zwei zahmen Seiten, wir nennen sie *zahm*, und Dreieck mit genau zwei wilden Seiten, wir nennen sie *wilde* Dreiecke. Übrigens haben alle zahmen Dreiecke wegen (2) die gleiche Form: Die beiden zahmen Seiten stehen rechtwinklig aufeinander und haben die Länge 1, die wilde Seite ist die Diagonale eines Einheitsquadrates.

1. Beweis: Fall 1: Es gibt keine wilden Dreiecke. Da zur Bedeckung eines Rechtecks mit Dreiecken mindestens zwei Dreiecke notwendig sind, gibt es mindestens zwei zahme Dreiecke und die Aussage ist bewiesen.

Fall 2: Nicht Fall 1, d.h. es gibt mindestens ein wildes Dreieck. Wir zeichnen zu jedem wilden Dreieck die Verbindungstrecke der Mittelpunkte der beiden wilden Seiten ein (abgekürzt *VMP*), also die Mittelparallele zur zahmen Seite.

Nach (3) grenzt an jede wilde Seite eines Dreiecks genau eine wilde Seite eines zweiten Dreiecks und nach (3) sind die Mittelpunkte identisch. Falls dieses zweite Dreieck ebenfalls wild ist, schließt sich also hier genau eine zweite *VMP* an, und falls dieses zweite Dreieck zahm ist, schließt sich keine *VMP* an.



So entsteht – vgl. Figur − ausgehend von einer *VMP* eine Kette von *VMP*s, die sich nicht verzweigt und genau dann endet, wenn sie die wilde Seite eines zahmen Dreiecks erreicht; dieses hat dann wegen (2) notwendigerweise die Form eines durch die Diagonale halbierten Einheitsquadrates.

Da jede *VMP* parallel zu einer zahmen Seite ist, ist sie – nach Definition von zahm − parallel zu einer Gitterlinie und hat zu ihr den halben Abstand der zugehörigen Höhe, also 0,5. Also liegt sie auf einer Mittelgitterlinie.

Wenn nun zwei Dreiecke eine wilde Seite gemeinsam haben und ihre zahmen Seiten parallel sind, dann liegen die beiden *VMP*s auf der gleichen Mittelgitterlinie.

Wenn aber die beiden zahmen Seiten nicht parallel sind, stehen sie rechtwinklig aufeinander, und damit stehen auch die beiden zugehörigen *VMP*s rechtwinklig zueinander. Da sie einen gemeinsamen Punkt haben und auf zueinander senkrechts stehenden Mittelgitterlinien liegen, muss dieser gemeinsame Punkt der Mittelpunkt eines Einheitsquadrates sein. So entstehen also unverzweigte Ketten von *VMP*s.

Falls eine solche Kette geschlossen ist, verbindet sie die Mittelpunkte von benachbarten Einheitsquadraten mit gemeinsamer Seite, und kein Quadrat wird mehrfach durchlaufen. Die zugehörigen Dreiecke bedecken lückenlos und überlappungsfrei genau diejenigen Einheitsquadrate, die die VMPs durchlaufen. Dabei muss die Anzahl der Quadrate, die so eine geschlossene Kette durchläuft, gerade sein, weil jeder Weg in waagrechter Richtung irgendwann in gleicher Länge in umgekehrter Richtung durchlaufen wird, gleiches gilt für Wege in senkrechter Richtung. (Oder: Färbt man die Einheitsquadrate schachbrettartige mit zwei Farben, so wechselt entlang des Weges die Farbe mit jedem Einheitsquadrat, das passiert wird, die Gesamtzahl muss also gerad sein.)

Falls so eine Kette nicht geschlossen ist, befindet sich am Anfangs− und am Endpunkt ein zahmes Dreieck. Dies kann nicht für Anfangs− und Endpunkt das gleiche Dreieck sein, da in diesem Fall die Kette der VMPs von beiden Richtungen an die eine wilde Seite des zahmen Dreiecks anstoßen würde und so eine geschlossene Kette entstehen würde.

Nun sind aber m und n beide ungerade, d.h. auch das Produkt $m \cdot n$ ist ungerade und damit die Anzahl der Einheitsquadrate. Entfernt man alle Einheitsquadrate, die von geschlossenen Ketten durchlaufen werden, so bleibt entweder eine Kette mit Anfangs− und Endpunkt übrig und damit zwei zahme Dreiecke. Falls keine solche Kette übrigbleibt, bleibt eine ungerade Anzahl von Einheitsquadraten übrig, also mindestens eines. Diese sind nach der vorgenommenen Fallunterscheidung mit zahmen Dreiecken überdeckt. Eine solche Überdeckung ist nur möglich, wenn man diese Einheitsquadrate einzeln durch eine wilde Diagonale in zwei zahme Dreiecke zerteilt.

Damit gibt es in jedem Fall mindestens zwei zahme Dreiecke, dies war zu zeigen.

2. Beweis: Zunächst stellen wir fest: Jedes Dreieck hat mindestens eine wilde Seite und nach (1) mindestens eine zahme Seite. Also ist mindestens ein Endpunkt einer wilden Seite auch Endpunkt einer zahmen Seite. Somit liegen die Endpunkte einer wilden Seite stets auf benachbarten Gitterlinien. Hat ein Dreieck zwei zahmen Seiten, dann stehen diese beiden Seiten rechtwinklig aufeinander und haben je die Länge 1. Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit zwei zahmen Seiten ist also $^1/_2$.

Die Randlinie des Rechtecks hat die Länge $2m + 2n$; sie ist unterteilt in lauter zahmen Seiten von Dreiecken. Der gesamte Flächeninhalt dieser Randdreiecke ist sicher nicht größer als $^1/_2 \cdot (2m + 2n) \cdot 1 = m + n$. Gleichheit ist genau dann gegeben, wenn in den Ecken keine Dreiecke mit zwei zahmen Seiten liegen.

Wir färben die Punkte aller zahmen Seiten, die im Innern des Rechtecks verlaufen, rot, einschließlich ihrer Endpunkte, d.h. auch diejenigen Endpunkte, die auf dem Rand des Rechtecks liegen. Die zahmen Seiten liegen nach Definition alle auf Gitterlinien, aber nicht alle Punkte auf Gitterlinien liegen auf einer zahmen Seite. Solche ungefärbten Punkte liegen entweder auf dem Rand des Rechtecks, oder sind Abschnitte von Gitterlinien, die durch das Innere eines Zerlegungsdreiecks und damit auch im Innern des Rechtecks verlaufen.

So erhalten wir im Innern des Rechtecks auf den Gitterlinien rote Teilstrecken. Wir zeigen, dass die Endpunkte dieser roten Teilstrecken Gitterpunkte sind:

Sei P ein solcher Endpunkt einer roten Strecke r auf einer Gitterlinie. Nun ist

entweder P auf dem Rand des Rechtecks, dann ist P Gitterpunkt;

oder P ist der Eckpunkt eines Dreiecks PQR, bei dem die Seiten PQ und PR beide wild sind und durch dessen Inneres die Gitterlinie von P verläuft, dann ist nach (1) die Strecke QR eine zahme Seite, die nicht parallel zur Gitterlinie von P sein kann, da sie dann nicht durch das Innere des Dreiecks PQR verlaufen würde. Also steht QR senkrecht auf dieser Gitterlinie, und nach (2) hat sie von P den Abstand 1, also ist P ein Gitterpunkt;

oder P ist Punkt auf der zahmen Seite QR eines Dreiecks QRS. Dann ist P der Schnittpunkt von zwei Gitterlinien, also ein Gitterpunkt.

Damit verbinden die roten Strecken auf den Gitterlinien lauter Gitterpunkte und haben insbesondere ganzzahlige Länge. Die Gesamtlänge aller roten Strecken auf den Gitterlinien sei R. Läuft man entlang der roten Strecken auf den Gitterlinien, so hat man stets rechts und links genau ein Dreieck, dabei wird ein Dreieck genau dann doppelt betrachtet, wenn es zwei zahme Seiten hat. Die Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke im Innern des Rechtecks ist also nicht größer als $2 \cdot {}^1/_2 \cdot R = R$.

Nun betrachten wir Flächeninhalte: Der Flächeninhalt des Rechtecks ist mn, der Flächeninhalt aller Dreiecke ist nicht größer als $m + n + R$, also gilt $R \geq mn - m - n$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn es keine Dreiecke mit zwei zahmen Seiten gibt. Da ein Dreieck mit zwei zahmen Seiten den Flächeninhalt $^1/_2$ hat, können wir schärfer formulieren (es sei d die Anzahl der Dreiecke mit zwei zahmen Seiten):

$$R = mn - m - n + {}^d/_2$$

Nun betrachten wir die Einheitsquadrate. Durch das Innere jedes Einheitsquadrates verläuft ein Teil von mindestens einer wilden Seite. Die Endpunkte dieser Seite liegen auf benachbarten Gitterlinien, dabei können diese Endpunkte Ecken des Einheitsquadrates sein oder auf den Trägergeraden von nicht benachbarten Quadratseiten liegen, und zwar innerhalb oder außerhalb der Quadratseiten. Man macht sich zusammen mit (3) schnell klar, dass in jedem Fall dann mindestens zwei Seiten des Einheitsquadrates Teil von zahmen Seiten sind. So unterscheiden wir folgende Fälle:

Fall 1: Es gibt ein Einheitsquadrat, bei dem vier Seiten Teil von zahmen Seiten sind: Dann ist wegen (2) dieses Einheitsquadrat zusammengesetzt aus zwei Dreiecken mit je zwei zahmen Seiten.

Fall 2: Es gibt ein Einheitsquadrat, bei dem drei Seiten Teil von zahmen Seiten sind: Dann gibt es notwendigerweise zwei benachbarte Seiten, die beide zahme Seiten eines Dreiecks sind; die dritte Seite dieses Dreiecks ist dann eine Diagonale in diesem Quadrat. Wie oben bemerkt, ist $R = mn - m - n + {}^d/_2$, und da R ganzzahlig ist, folgt $d \geq 2$.

Fall 3: Weder Fall 1 noch Fall 2, d.h. jedes Einheitsquadrat hat genau zwei Seiten, die Teil von zahmen Seiten von Dreiecken sind. Dieser Fall kann aber nicht eintreten, wie wir mit folgendem Widerspruchsbeweis zeigen: In diesem Fall hat jedes Einheitsquadrat genau zwei Seiten, die nicht Teil von zahmen Seiten sind, diese färben wir grün. Wir stellen fest, dass die Seiten auf den Rändern des Rechtecks nicht grün sind. Nun bewegen wir uns nach folgender Regel durch die Einheitsquadrate: Wir beginnen in einem beliebigen Einheitsquadrat und verlassen es über eine grüne Seite in ein benachbartes Einheitsquadrat, und entfärben die Seite, über die wir gegangen sind. Dieses zweite Einheitsquadrat verlassen wir über die verbleibende grüne Kante in das nächste Einheitsquadrat und entfärben wieder die überquerte Seite. So fahren wir fort, bis wir wieder in ein schon begangenes Einheitsquadrat kommen; dies muss nach endlich vielen Zügen der Fall sein. Der Weg ist durch diese Regel eindeutig bestimmt; nach Widerspruchsannahme ist dieser Weg auch möglich, weil jedes Einheitsquadrat genau zwei grüne Seiten im Innern des Rechtecks hat. Wir kommen stets im Einheitsquadrat an, von dem wir ausgegangen sind, weil es das einzige begangene Einheitsquadrat ist, das noch eine grüne Seite hat.

So erhalten wir einen geschlossenen Weg. Färbt man die Einheitsquadrate schachbrettartig, so führt der Weg abwechselnd über schwarze und weiße Felder und wir folgern hieraus, dass der Weg eine gerade Anzahl von Feldern überquert.

Da m und n ungerade sind, ist auch ihr Produkt mn ungerade und damit auch die Gesamtzahl an Einheitsquadraten im vorgegebenen Rechteck.

Nun entfernen wir alle Einheitsquadrate des geschlossenen Weges, also eine gerade Anzahl. Es bleibt eine ungerade Anzahl von Einheitsquadraten, von denen jedes zwei grüne Seiten hat. In diesen Einheitsquadraten führen wir diesen Prozess in gleicher Weise fort. Nach Widerspruchsannahme können wir dies stets tun, dann bleibt aber irgendwann ein einzelnes Einheitsquadrat übrig; dies kann aber keine grünen Seiten mehr haben, weil alle Seiten der benachbarten Quadrate nicht mehr grün sind. Damit ist der gesuchte Widerspruch hergeleitet.

Damit gibt es in jedem Fall mindestens zwei zahme Dreiecke, dies war zu zeigen.

Bemerkung: Nach erstem Anschein verfolgen die die beiden Beweise prinzipiell verschiedene Ansätze. Sie beschreiben aber beide die gleichen geschlossenen Wege.