BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2022

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand:11. Mai 2022

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Fünf Eichhörnchen haben zusammen einen Vorrat von 2022 Nüssen. Am ersten Tag kommen 2 Nüsse hinzu, am zweiten Tag 4 Nüsse, am dritten 6 Nüsse und so weiter, d.h. an jedem weiteren Tag kommen jeweils 2 Nüsse mehr hinzu als am Tag zuvor.

Am Ende irgendeines Tages teilen die Eichhörnchen den Vorrat untereinander auf. Ist es möglich, dass dabei alle gleich viele Nüsse erhalten und keine Nuss übrigbleibt?

Anmerkung: Die Nüsse bleiben beim Verteilen ganz. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Nein, das ist nicht möglich.

Beweis: Wenn jedes Eichhörnchen gleich viele Nüsse erhalten soll und keine Nuss übrigbleiben darf, muss die Gesamtzahl der Nüsse im Vorrat durch 5 teilbar sein, d.h. die Endziffer dieser Gesamtzahl (bei Darstellung im Dezimalsystem) muss die Ziffer 5 oder die Ziffer 0 sein. ist. Nun können wir verschieden schließen:

Variante 1: Die Endziffer der hinzukommenden Nüsse an den einzelnen Tagen ist der Reihe nach 2, 4, 6, 8, 0. 2, usw.; hieraus können wir beginnend vom Tag 1 jeweils durch einfache Addition die Endziffer des Gesamtvorrates am Ende des Tages berechnen. Diese Rechnung hängt nur ab von dem Paar (Endziffer der Gesamtzahl der Nüsse im Vorrat vom Vortag; Endziffer der Anzahl Nüsse, die im Laufe des Tages hinzukommen). Darstellung in einer Tabelle ergibt:

Tag Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9...
Endziffer der hinzu-kommenden Nüsse	2	4	6	8	0	2	4	6	8...
Endziffer des Vorrates am Tag zuvor	2	4	8	4	2	2	4	8	4...
Endziffer des Vorrates am Ende des Tages	4	8	4	2	2	4	8	4	2...

Diese Zahlenpaare sind (vgl. die Zahlenwerte in der zweiten und dritten Zeile der Tabelle) (2;2), (4;4), (6;8), (8;4), (0;2), (2;2),.... Das Paar am 6. Tag ist das gleiche wie am 1. Tag; damit wiederholen sich die Zahlenpaare der ersten 5 Tage immer wieder. Die Endziffern 0 und 5 kommen bei der Anzahl der Nüsse im Vorrat nie vor, damit ist alles gezeigt.

Variante 2 (abstrakte Formulierung ähnlicher Gedanken): Sei $v(n)$ die Anzahl Nüsse im Vorrat am Ende des Tages n, und $h(n)$ die Anzahl der am Tag n neu hinzukommenden Nüsse. Dann gilt für $n \geq 0$

$$h(0) = 0, \quad h(n+1) = h(n) + 2, \quad v(0) = 2022, \quad v(n+1) = v(n) + h(n+1).$$

Offensichtlich ist $h(n) = 2n$ und mit der Gaußschen Summenformel

$$v(n) = 2022 + ((h(1) + h(2) + ... + h(\mathrm{n})) = 2022 + 2\,(1 + 2 + ... + n)$$
$$= 2022 + n(n+1).$$

Nun können wir verschieden schließen:

1. Möglichkeit: Wir untersuchen, ob es Zahlen n gibt, für die $v(n) \equiv 0 \bmod 5$ gilt; hierzu genügt eine Rechnung mit je einem Wert n aus den fünf Restklassen mod 5: Es ist $v(1) \equiv 2 + 1 \cdot 2 \equiv 4$, $v(2) \equiv 2 + 2 \cdot 3 \equiv 3$, $v(3) \equiv 2 + 3 \cdot 4 \equiv 4$, $v(4) \equiv 2 + 4 \cdot 5 \equiv 2$, $v(5) \equiv 2 + 5 \cdot 6 \equiv 2$. Für keines dieser n ist $v(n) = 0$, das war zu zeigen.

2. Möglichkeit: Damit ist $v(n)$ genau dann durch 5 teilbar, wenn $n(n+1)$ die Endziffer 3 oder 8 hat. Da aber von den aufeinander folgenden Zahlen n und $n+1$ stets eine gerade ist, sind $n(n+1)$ und damit auch $2022 + n(n+1)$ gerade, d.h. $h(n)$ ist ebenfalls gerade und kann somit niemals die ungerade Endziffer 3 haben. Das Produkt von zwei aufeinander folgenden Zahlen kann aber auch nie Endziffer 8 haben: Zum Überprüfen genügt es zu zeigen, dass keines der Produkte von aufeinander folgender Endziffern auf Ziffer 8 endet. Produkte mit Faktoren 0 und 5 scheiden von vornherein aus, und von $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$, $6 \cdot 7 = 42$, $7 \cdot 8 = 56$, $8 \cdot 9 = 72$ endet keines mit Ziffer 8. Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung: Die "Gaußsche Summenformel" gibt es nicht erst seit Gauß, sondern war schon bei den Babyloniern bekannt. Man kann annehmen, dass Gauß sie in seinem ersten Mathematik-Buch gelesen hatte, bevor er damit im Rechenunterricht seinen Lehrer (der sie wohl auch kannte) überraschte.

Aufgabe 2: Eva zeichnet ein gleichseitiges Dreieck und seine Höhen. In einem ersten Schritt zeichnet sie das Mittendreieck des gleichseitigen Dreiecks ein, im zweiten Schritt das Mittendreieck dieses Mittendreiecks und so weiter.

Nach jedem Schritt zählt Eva alle Dreiecke, deren Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegen. Wie viele Mittendreiecke muss sie mindestens eingezeichnet haben, damit die Figur mehr als 2022 solche Dreiecke enthält?

Hinweise: Das Mittendreieck eines Dreiecks besteht aus den Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der Seiten. Vor dem Einzeichnen des ersten Mittendreiecks findet man mehr als 6 solche Dreiecke.
Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Eva muss mindestens 65 Mittendreiecke einzeichnen, damit die Figur 2022 Dreiecke der geforderten Art hat.

Bezeichnungen: Den Ausdruck "Dreiecke, deren Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegen" verkürzen wir zu "Teil−Dreiecke" (wobei natürlich das Ausgangsdreieck auch ein Teil−Dreieck ist), den Ausdruck "gezeichnete Strecken" verkürzen wir zu "Strecken".

Mit $D(n)$ (n = 0, 1, 2, 3, ...) bezeichnen wir die Gesamtzahl an Teil−Dreiecken nach Einzeichnen von n Mittendreiecken.

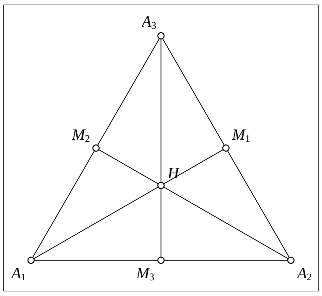
Die Ecken des Ausgangsdreiecks bezeichnen wir mit A_i (i = 1, 2, 3), den Höhenschnittpunkt mit H, die Mitten der Seiten mit M_i, wobei M_i die Mitte derjenigen Seite ist, die der Ecke A_i gegenüberliegt. Bekanntlich sind im gleichseitigen Dreieck die Höhen gleichzeitig Seitenhalbierende, d.h. A_i, H und M_i liegen auf einer Geraden.

Beweis (vollständige Induktion nach Anzahl n der eingezeichneten Mittendreiecke):

Wir werden zeigen, dass $D(n) = 16 + 31n$ $(n \geq 0)$. Dann ist die Forderung $D(n) = 16 + 31n \geq 2022$ äquivalent zu $n \geq (2022 - 16) : 31 > 64{,}7$, also zur Behauptung $n \geq 65$.

<u>Induktionsanfang</u>: Die Formel stimmt für $n = 0$, d.h.

$$D(0) = 16 + 0 \cdot 31 = 16.$$



Das Ausgangsdreieck hat 7 Punkte, die Ecken möglicher Teil−Dreiecke sind. In folgender Liste haben wir alle Teil−Dreiecke aufgeführt, sortiert nach Art der Ecken. Die Anzahl dieser Teil−Dreiecke berechnet man sofort mit einfachster Kombinatorik, sie stehen in jeder Zeile am Ende in Klammern.

Es gibt Teil−Dreiecke mit

a) drei Ecken A_i (1),

b) zwei von drei Ecken A_i, A_j und einer Ecke H (3),

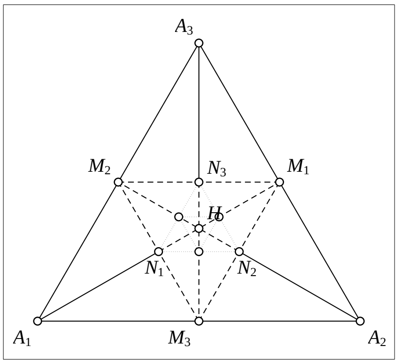
c) zwei von drei Ecken A_i, A_j und einer Ecke M_k (k=i oder k=j) (6),

d) einer von drei Ecken A_i, H und einer von zwei Ecken M_j (i≠j) (6).

Weitere Teil−Dreiecke gibt es nicht, da die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte noch nicht eingezeichnet sind. Addition ergibt tatsächlich $D(0) = 16 + 0 \cdot 31$.

(Kontrollrechnung: Es gibt $\binom{7}{3}$ = 35 Tripel von möglichen Ecken. Von diesen führen nicht alle zu Teil−Dreiecken: Die drei Ecken dürfen nicht auf einer (schon gezeichneten!) Strecke liegen (das sind 6 Tripel), sie dürfen nicht genau 2 der 3 Ecken M_i enthalten (das sind 3·(7−3) = 12 Tripel) und nicht alle 3 Ecken M_i (das ist 1 Tripel). damit bleiben tatsächlich 35 – 6 – 12 – 1 = 16 Dreieck-erzeugende Tripel übrig.)

<u>Induktionsannahme</u>: Es sei $D(n) = 16 + 31n$ für ein bestimmtes $n \geq 0$.



Induktionsschluss: Dann ist $D(n+1) = 16 + 31\cdot(n+1)$.

Zum Nachweis betrachten wir ein Dreieck $A_1A_2A_3$ mit $n+1 \geq 1$ eingezeichneten Mittendreiecken und hier zunächst nur das zuerst eingezeichnete Teil−Dreieck $M_1M_2M_3$. Dieses Dreieck ist ebenfalls gleichseitig und in ihm sind noch n Mittendreiecke eingezeichnet, ebenfalls die Höhen, diese liegen auf den Höhen des Ursprungsdreiecks, d.h. H ist auch der Schnittpunkt der Höhen von Dreieck $M_1M_2M_3$. Die Schnittpunkte der Höhen von Dreieck $M_1M_2M_3$ mit den Seiten M_iM_j nennen wir N_k (i, j, k verschieden). Zentrische Streckung mit Zentrum H und Streckfaktor 2 und anschließender Drehung im H um 180° führt es in das Dreieck $A_1A_2A_3$ mit n eingezeichneten Mittendreiecken über, d.h. die Anzahl der in Dreieck $M_1M_2M_3$ enthaltenen Teil−Dreiecke ist nach Induktionsannahme $D(n)$. Jedes dieser Teil−Dreiecke ist auch ein Teil−Dreieck bezogen auf $A_1A_2A_3$.

Nun bestimmen wir die Anzahl der noch nicht gezählten Teil−Dreiecke von Dreieck $A_1A_2A_3$. In der Figur haben wir alle Strecken, die Strecken von Dreieck $M_1M_2M_3$ und seinen Mittendreiecken sind, gestrichelt eingezeichnet. Die noch nicht gezählten Teil−Dreiecke von $A_1A_2A_3$ sind nun die Dreiecke, die mindestens eine Seite haben, die mindestens zum Teil nicht gestrichelt ist. Da jede nicht gestrichelte Strecke einen Endpunkt A_i hat, sind die noch nicht gezählten Dreiecke genau die, die mindestens eine Ecke A_i haben. Dies sind zunächst die 16 Dreiecke, die nur Ecken A_i, M_i und H, aber nicht zwei oder drei Ecken M_i haben (das folgte oben aus der Überlegung für $n = 0$). Die Ecken N_i und H auf den Höhen sind die einzigen, die mit der Ecke M_j ($j \neq i$) über eine Strecke verbunden sind. Deswegen kommen noch genau 3 Teil−Dreiecke $A_iM_jM_k$, ($k \neq i \neq j$), 6 Teil−Dreiecke $A_iM_iM_j$ ($j \neq i$) und 6 Teil−Dreiecke $A_iN_iM_j$ ($j \neq i$) hinzu, das sind zusammen 15. Damit ist

$$D(n+1) = D(n) + (16 + 15) = 16 + 31n + 31 = 16 + 31(n+1) = D(n+1)\text{ ; das war zu zeigen.}$$

Bemerkung: In obigem Beweis wurden die zu zählenden Dreieck nach einem bestimmten Merkmal (hier: Art der Ecken) klassifiziert. So wurde eine Überprüfung erleichtert, ob jedes Dreieck genau einmal gezählt wurde. Eine solche Klassifizierung ist auf mehrere Arten möglich, z.B. über die Form der Dreiecke: Es werden nur Linien gezeichnet, die um Vielfache von 30° von einer Seite des ursprünglichen Dreiecks gedreht wurden. Damit können nur Innenwinkel von 30°, 60°, 90°, 120° und 150 ° entstehen, bei den zu zählenden Dreiecken scheiden Innenwinkel von 150° aus, weil sonst die Innenwinkelsumme von 180° im Dreieck nicht mehr erreicht werden kann. So bleiben nur Dreiecke in drei Formen übrig: gleichseitige mit 60° Innenwinkel, gleichschenklige mit Basiswinkel 30° und Spitzenwinkel 120° sowie rechtwinklige mit 90°, 60° und 30° Innenwinkel.

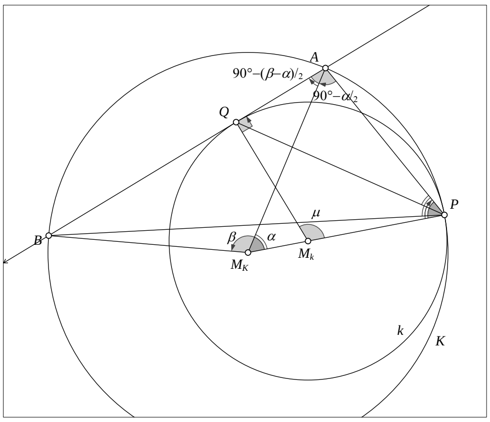
Bemerkung: Wollte Eva diese Figur tatsächlich zeichnen, so müsste sie wohl ein großes Stück Papier verwenden: Die Seite jeden Mittendreiecks ist halb so lang wie die des zuvor eingezeichneten. Wenn wir also davon ausgehen, dass das letzte Mittendreieck eine Seitenlänge von 1 Ångström = $10^{-10}m$ hat (das ist die Größenordnung des Abstandes zweier Atome in einem Molekül und kleiner kann man wohl nicht zeichnen), so hat das Ursprungsdreieck nach Auskunft meines Taschenrechners eine Seitenlänge von $2^{65} \cdot 10^{-10}m \approx 3{,}69 \cdot 10^{9}m$. Das ist ungefähr die 10fache Entfernung Erde – Mond (384 000 km = $3{,}84 \cdot 10^{8}m$). Ob da bei der Zeichnung schon quantenmechanische oder relativistische Effekte mitberücksichtigt werden müssen, entzieht sich meiner Kenntnis.

Aufgabe 3: Ein Kreis k berührt einen großen Kreis K von innen im Punkt P, der Punkt Q sei ein von P verschiedener Punkt auf k. Die Tangente an k im Punkt Q schneidet K in den Punkten A und B.

Beweise, dass die Gerade PQ den Winkel $\angle APB$ halbiert.

Bezeichnungen: Mit M_K und M_k seien die Mittelpunkte der Kreise K bzw. k bezeichnet.

1. Beweis (Winkelsumme im 3−Eck und 4−Eck): Es seien $\mu := \angle PM_kQ$, $\alpha := \angle PM_KA$ und $\beta := \angle PM_KB$ die Spitzenwinkel der gleichschenkligen Dreiecke PM_kQ, PM_KA bzw. PM_KB. O.B.d.A. ist $\mu \le 180°$, ferner $\alpha < \beta$ (andernfalls spiegeln wir an PM_K und vertauschen in geeigneter Weise α und β, sowie A und B).



Wir betrachten zunächst den Fall $\beta < 180°$. Dann liegen die Punkte Q und A in der einen Halbebene bez. der Geraden PB, die Punkte M_K und M_k in der anderen.

Im (sicher nicht überschlagenen!) Viereck PM_kQA gilt nun nach Satz von der Innenwinkelsumme im Viereck bzw. gleichschenkligen Dreiecken.

$$\begin{aligned}\mu &= 360° - \angle P - \angle Q - \angle A \\ &= 360° - (90° - {}^{\alpha}/_{2}) - 90° - [(90° - {}^{(\beta-\alpha)}/_{2}) + (90° - {}^{\alpha}/_{2})] \\ &= {}^{1}/_{2}(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

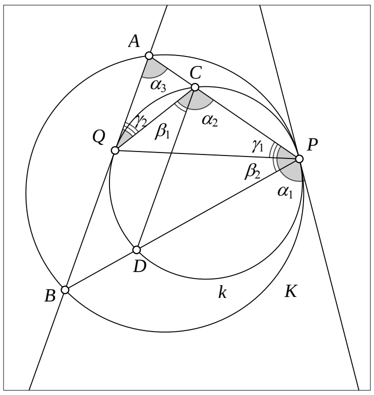
Weiter ist $\angle QPB = \angle QPM_K - \angle BPM_K = 90° - {}^{\mu}/_{2} - (90° - {}^{\beta}/_{2}) = {}^{\beta}/_{2} - {}^{1}/_{4}(\alpha + \beta) = {}^{1}/_{4}(\beta - \alpha)$,

$\angle APQ = \angle APM_K - \angle QPM_K = 90° - {}^{\alpha}/_{2} - (90° - {}^{\mu}/_{2}) = {}^{1}/_{4}(\alpha + \beta) - {}^{\alpha}/_{2} = {}^{1}/_{4}(\beta - \alpha)$,

also gilt $\angle QPB = \angle APQ$. Das war zu zeigen.

Falls $\beta \ge 180°$ kann obige Argumentation und Rechnung übernommen werden, wenn man die vorkommenden Winkel als orientierte Winkel betrachtet. Dann hat das Dreieck PM_KB einen Spitzenwinkel größer oder gleich 180° und negative Basiswinkel, die rechnerischen Ergebnisse bleiben erhalten. Ersatzweise kann man auch das Dreieck BM_KP mit Spitzenwinkel $360° - \beta$ betrachten und an geeigneter Stelle Winkel addieren anstatt zu subtrahieren.

2. Beweis (Sehnen−Tangenten−Winkelsatz): Seien C und D die Schnittpunkte der Geraden AP bzw. BP mit k. Zusätzlich zeichnen wir noch die gemeinsame Tangente an k in P ein. Mit den Bezeichnungen der Figur genügt es zu zeigen, dass $\gamma_1 = \beta_2$.



Mit Umfangswinkelsatz in Kreis k über der Sehne QD folgt

$$\beta_1 = \beta_2$$

Mit Sehnen−Tangenten−Satz in den Kreisen k und K folgt

$\gamma_1 = \gamma_2$ (über der Sehne CQ)

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (über den Sehnen PD bzw. PB).

Aus der letzten Zeile folgt insbesondere nach Stufenwinkelsatz $CD || AB$. Zusammen mit dem Wechselwinkelsatz folgt nun

$\beta_2 = \beta_1 = \gamma_2 = \gamma_1$. Das war zu zeigen.

3. Beweis (Strahlensatz und Sehnen−Tangenten−Satz): Die Gerade PQ ist bekanntlich genau dann Winkelhalbierende, wenn $\overline{AQ}:\overline{QB} = \overline{AP}:\overline{BP}$.

Mit Sehnen−Tangenten−Winkel−Satz in den Kreisen k und K folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (über den Sehnen PD bzw. PB), nach Stufenwinkelsatz also $CD \| AB$. Diese Parallelen bilden zusammen mit Zentrum P und den Strahlen $[PA$ und $[PB$ eine Strahlensatzfigur, aus der wir ablesen können, dass

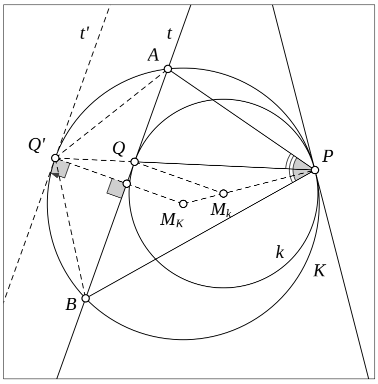
$$\overline{AC}:\overline{BD} = \overline{AP}:\overline{BP} \qquad (1)$$

Mit Sehnen−Tangenten−Satz gilt $\overline{AQ}^2 = \overline{AC}\cdot\overline{AP}$, $\overline{BQ}^2 = \overline{BD}\cdot\overline{BP}$, also zusammen mit (1)

$$\overline{AQ}^2 : \overline{BQ}^2 = (\overline{AC}\cdot\overline{AP}) : (\overline{BD}\cdot\overline{BP}) = (\overline{AC}:\overline{BD})\cdot(\overline{AP}:\overline{BP}) = (\overline{AP}:\overline{BP})^2 .$$

Hieraus folgt sofort $\overline{AQ}:\overline{QB} = \overline{AP}:\overline{BP}$, das war zu zeigen.

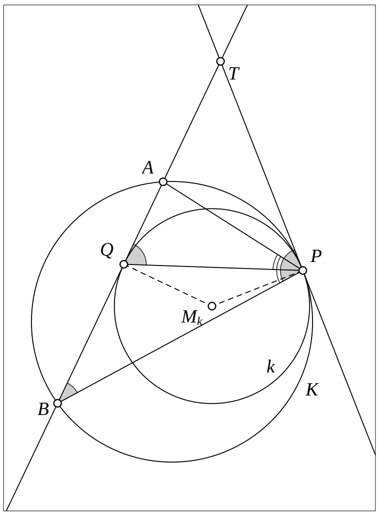
4. Beweis, (Zentrische Streckung): Diejenige zentrische Streckung mit Zentrum P, die M_k auf M_K abbildet, bildet den Kreis k auf den Kreis K ab, den Punkt Q auf einen Punkt, den wir Q' nennen, und die Tangente t in Q an k auf die Tangente t' in Q' an K. Also ist $Q'M_K \perp t'$, und weil $t' \| t$, ist auch $Q'M_K \perp t$ und damit – aus Symmetriegründen – $Q'M_K$ Mittelsenkrechte der Sehne AB im Kreis k. Also sind die Sehnen AQ' und BQ' gleich lang und nach Umfangswinkelsatz die Winkel APQ' und $Q'PB$ gleich weit. Das war zu zeigen.



5. Beweis (Sehnen−Tangentensatz bzw. ähnliche Dreiecke): Wir betrachten zusätzlich die Tangente an beide Kreise in P. Falls sie parallel sind, liegen AP und BP symmetrisch bez. der Geraden PM_k, insbesondere ist dann $\angle APQ = \angle QPB$.

Falls die beiden Tangenten nicht parallel sind, haben sie einen Schnittpunkt, den wir T nennen. O.B.d.A. nehmen wir an, dass T und A in der gleichen Halbebene bez. QP liegen; falls nicht, vertauschen wir im Beweis die Bezeichnungen A und B.

Nun ist das Dreieck QPT gleichschenklig mit Basis QP, weil die Strecken TP und TQ als Tangentenabschnitte vom gleichen Punkt an den Kreis k gleich lang sind (oder: weil sie symmetrisch bez. der Geraden TM_k liegen). Damit gilt



$$\angle TPA + \angle APQ = \angle TPQ = \angle PQT \quad (1)$$

Im Dreieck BPQ ist nun nach Außenwinkelsatz

$$\angle PQT = \angle PBQ + \angle QPB \qquad (2)$$

Nach Sehnen−Tangenten−Winkel−Satz ist über der Sehne AP des Kreises K nun

$$\angle TPA = \angle PBA = \angle PBQ \qquad (3)$$

Nun setzen wir (1), (2) und (3) zusammen und erhalten

$$\angle TPA + \angle APQ = \angle TPQ \stackrel{(1)}{=} \angle PQT \stackrel{(2)}{=} \angle PBQ + \angle QPB \stackrel{(3)}{=} \angle TPA + \angle QPB.$$

Auf beiden Seiten subtrahieren wir $\angle TPA$ und erhalten $\angle APQ = \angle QPB$ und sind fertig.

Variante für (3): Die Dreiecke APT und PTB haben bei T den gleichen Winkel und nach Sehnen−Tangenten−Satz gilt $\overline{TP}^2 = \overline{TA}\cdot\overline{TB}$, also $\overline{TA}:\overline{TP} = \overline{TP}:\overline{TB}$, also sind die Dreiecke ähnlich. Damit ist $\angle TPA = \angle PBT = \angle PBQ$.

Aufgabe 4: Für jede positive ganze Zahl k sei a_k der größte Teiler von k, der nicht durch 3 teilbar ist. Die Folge (s_n) wird definiert durch $s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Beweise: (a) Die Zahl s_n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Anzahl der Einsen in der Darstellung von n im Dreiersystem durch 3 teilbar ist.

(b) Es gibt unendlich viele Zahlen n, für die s_n durch 3^3 teilbar ist.

Hinweis: Es ist z.B. $s_6 = 1 + 2 + 1 + 4 + 5 + 2$.

Vorbemerkungen: Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir gelegentlich $s_n = s(n)$, $a_k = a(k)$ usw.

Als bekannt setzen wir das Prinzip der Darstellung einer nicht−negativen ganzen Zahl n im Dreiersystem voraus: Zu jeder solchen Zahl gibt es eindeutig bestimmte Ziffern $b_j \in \{0,1,2\}$, $j = 0, 1, ..., m$, $b_m \neq 0$, mit $n = \sum_{j=0}^{m} b_j 3^j$; diese Ziffern schreiben wir nebeneinander und nennen $n = b_m b_{m-1}...b_1 b_0|_3$ die Darstellung von n im Dreiersystem. So ist z.B. $n = 20 = \mathbf{2}\cdot 3^2 + \mathbf{0}\cdot 3^1 + \mathbf{2}\cdot 3^0 = \mathbf{202}|_3$.

1. Beweis zu a) (Darstellung im Dreiersystem): Mit $e(n)$ sei die Anzahl der Ziffern 1 in der Darstellung von n im Dreiersystem bezeichnet. Wir verkürzen gelegentlich die Formulierung "Ziffer von n in der Darstellung von n im Dreiersystem" zu "Ziffer von n".

Zunächst stellen wir fest, dass man $a(k)$ aus k bestimmen kann, indem man durch die höchste Dreier-Potenz dividiert, die in der Primfaktorzerlegung von k vorkommt. Dies entspricht dem Streichen der Endnullen von k, d.h. die Ziffernfolgen von $a(k)$ und k stimmen von links überein bis einschließlich der letzten von Null verschiedenen Ziffer von k; diese letzte Ziffer nennen wir *signifikante Endziffer* von k. Die signifikante Endziffer von k ist also stets die Ziffer 1 oder 2; sie gibt gleichzeitig Dreierrest von $a(k)$ an.

Jeder Zahl k mit $a(k) \equiv 1 \bmod 3$ ordnen wir umkehrbar eindeutig eine Zahl k^* mit $a(k) \equiv 2 \bmod 3$ zu, indem wir in k die signifikante Endziffer 1 ersetzen durch die Ziffer 2. Die Folge und Anzahl von Ziffern von k und k^* stimmen überein mit Ausnahme der signifikanten Endziffer. Also gilt $k^* > k$ und $a(k) + a(k^*) \equiv 1 + 2 \equiv 0 \bmod 3$. Durchlaufen nun die k alle Zahlen mit $a(k) \equiv 1 \bmod 3$, so durchlaufen die k^* alle Zahlen mit $a(k^*) \equiv 2 \bmod 3$, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt.

Zu einem vorgegebenen n teilen wir nun die Zahlen $k \leq n$ mit $a(k) \equiv 1 \bmod 3$ auf in solche, bei denen auch $k^* \leq n$ und solche, bei denen $k^* > n$, d.h. in die Teilmengen

$$K_1 = K_1(n) = \{k \mid k \leq n,\ a(k) \equiv 1 \bmod 3,\ k^* \leq n\},\quad K_2 = K_1(n) = \{k \mid k \leq n,\ a(k) \equiv 1 \bmod 3,\ k^* > n\},$$

und so können wir umformen:

$$s(n) = \sum_{k \leq n} a(k) = \sum_{k \in K_1} \left(a(k) + a(k^*)\right) + \sum_{k \in K_2} a(k) \equiv \sum_{k \in K_2} a(k) \equiv 1 \cdot (\#\text{Elemente in } K_2) \bmod 3.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $|K_2| = e(n)$. Die vorgegebene Zahl n habe m Ziffern. Jeder ihrer Ziffern 1 ordnen wir folgendermaßen umkehrbar eindeutig eine Zahl aus K_2 zu: Sei die betrachtete Ziffer 1 an der der r−ten Stelle von links ($r \in \{1, 2, ... , m\}$), d.h. $n = b_m b_{m-1}...b_{r-1}1...b_0|_3$. Dann wählen wir $k = k(r) := b_m b_{m-1}...b_{r-1}10...0|_3$, d.h. n und k haben gleich viele Ziffern und diese stimmen von links bis zur signifikanten Endziffer von k überein, danach hat k nur noch Ziffern Null. Nach Konstruktion hat $k(r)$ die signifikante Endziffer 1, es ist $k(r) \leq n$ und $k(r)^* > n$; damit ist $k(r) \in K_2$. Gleichzeitig ist $k(r)$ die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft und für verschiedene r erhalten wir verschiedene $k(r)$. Damit ist $|K_2| = e(n)$; das war zu zeigen.

2. Beweis zu a) (Darstellung im Dreiersystem): Mit $e(n)$ sei die Anzahl der Ziffern 1 in der Darstellung von n im Dreiersystem bezeichnet, mit $p(n)$ die Anzahl der k mit $1 \le k \le n$, für die $a(k) \equiv 1 \bmod 3$ ist, mit $q = q(n)$ die Anzahl der k mit $1 \le k \le n$, für die $a(k) \equiv 2 \bmod 3$ ist.

Zunächst stellen wir fest, dass man $a(k)$ aus k bestimmen kann, indem man durch die höchste Dreier-Potenz dividiert, die in der Primfaktorzerlegung von k vorkommt. Dies entspricht dem Streichen der Endnullen von k, d.h. die Ziffernfolgen von $a(k)$ und k stimmen von links überein bis einschließlich der letzten von Null verschiedenen Ziffer von k. Damit ist klar, dass $e(k) = e(a(k))$ für alle k (und insbesondere für n); und dass die Darstellung von $a(k)$ im Dreiersystem stets mit Ziffer 1 oder 2 endet. Diese Endziffer gibt stets den Dreierrest von $a(k)$ an. Insbesondere gibt es kein $k \ge 1$, für das $a(k) = 0$.

Also ist $s(n) = a(1) + a(2) + ... + a(n) \equiv p + 2q \equiv p - q \bmod 3$, und weil $2 \equiv -1 \bmod 3$, gilt einfacher

$$3 \mid s(n) \;\Leftrightarrow\; p(n) - q(n) \equiv 0 \bmod 3.$$

Nun betrachten wir der Reihe nach die Zahlen $a(k)$ beginnend mit $k = 0$ (man kann ohne Problem $a(0) := 0$ setzen) und endend bei n. Wir überlegen, um wieviel sich die Anzahl der Ziffern 1 beim Übergang von k auf $k + 1$ ändert. So können wir Aussagen über die Anzahl der Ziffern 1 in der Zahl $a(n)$ und der Zahl n treffen. Dazu unterscheiden wir $p(n)$ Fälle 1 und $q(n)$ Fälle 2, andere gibt es nicht:

> Fall 1: $a(k+1) \equiv 1 \bmod 3$: Dann ist k von der Form $k = x10...0|_3$ und $k - 1$ entweder von der Form $x0|_3$ oder $x022...2|_3$; dabei steht x für eine beliebige (evtl. leere) Ziffernfolge aus {0, 1, 2}. Beide Male hat $a(k + 1)$ eine Ziffer 1 mehr als $a(k)$.
>
> Fall 2: $a(k+1) \equiv 2 \bmod 3$: Dann ist k entweder von der Form $k = x20...0|_3$ und $k - 1$ von der Form $x12...2|_3$ (evtl. leere Ziffernfolge von Ziffern 2). In jedem Fall hat $a(k + 1)$ eine Ziffer 1 weniger als $a(k)$.

Auf dem Weg von $k = 0$ bis n kam also insgesamt p Mal eine Ziffer 1 hinzu und q Mal eine Ziffer 1 weg, d.h. es gilt $e(n) = e(a(n)) = p(n) - q(n)$.

Dies setzen wir zusammen zu $3 \mid s(n) \;\Leftrightarrow\; e(n) = p(n) - q(n) \equiv 0 \bmod 3$.

Vor den **anderen Beweisen** leiten wir weitere Eigenschaften der $a(k)$ und der $s(n)$ her.

Zu jeder positiven ganzen Zahl k gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $r \ge 0$ und $t \ge 1$ mit $ggt(3,t) = 1$, für die $k = 3^r \cdot t$. Dann ist t der größte nicht durch 3 teilbare Teiler von k, also $a(k) = t$ und es folgt sofort

<u>Lemma 1</u>: Für alle $k \ge 1$ gilt: $a(k) = \begin{cases} a\left(k/3\right) & \text{falls } k \text{ durch 3 teilbar} \\ k & \text{falls } k \text{ nicht durch 3 teilbar} \end{cases}$

<u>Lemma 2</u>: Für alle $n \ge 1$ gilt:

(1) $s(3n) = s(n) + 3n^2$,

(2) $s(3n + 1) = s(n) + 3n^2 + 3n + 1$,

(3) $s(3n + 2) = s(n) + 3(n + 1)^2$.

Zum Nachweis von (1) stellen wir in der Definition $s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n$ die Summanden um, dabei benützen wir, dass in der Reihe 1, 2, ... , $3n$ jeweils genau n Zahlen mit Dreierrest 0 bzw. 1 bzw. 2 gibt. Dann ist mit Lemma 1

$$\begin{aligned} s(3n) &= (a_3 + a_6 + ... + a_{3n}) + (a_1 + a_{3n-1}) + (a_4 + a_{3n-4}) + ... + (a_{3n-2} + a_2) \\ &= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (1 + 3n - 1) + (4 + 3n - 4) + ... + (3n - 2 + 2) = s(n) + n \cdot 3n \\ &= s(n) + 3n^2. \end{aligned}$$

$$s(3n + 1) = s(3n) + a(3n + 1) = s(n) + 3n^2 + 3n + 1,$$

$$s(3n + 2) = s(3n + 1) + a(3n + 2) = s(n) + 3n^2 + 3n + 1 + 3n + 2 = s(n) + 3(n + 1)^2.$$

Aus Lemma 2 können wir sofort ablesen:

<u>Lemma 3</u>: Für alle $n \ge 1$ gilt:

(1) $s(3n) \equiv s(n) \bmod 3$,

(2) $s(3n + 1) \equiv s(n) + 1 \bmod 3$,

(3) $s(3n + 2) \equiv s(n) \bmod 3$.

3. Beweis zu a) Sei n positiv ganz mit der Darstellung im Dreiersystem $n = \sum_{j=0}^{m} b_j 3^j$ mit $b_j \in \{0,1,2\}$, $b_m \neq 0$, ferner $e(n)$ die Anzahl der Ziffern 1 in dieser Darstellung; zu zeigen ist $s(n) \equiv e(n) \bmod 3$ für alle n.

Mit n^* bezeichnen wir die Zahl, die entsteht, wenn man in der Darstellung von n im Dreiersystem die letzte Ziffer b_0 streicht, d.h. es ist $n^* = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ = größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $^n/_3$ ist. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$n = 3\sum_{j=1}^{m} b_j 3^{j-1} + b_0 \;=\; 3n^* + b_0 \text{ mit } b_0 \in \{0,1,2\},$$

d.h. die letzte Ziffer b_0 von n in der Darstellung im Dreiersystem ist der Rest von n bei Division duch 3.

Mit Lemma 3 können wir nun schließen:

$$s(n) \;=\; s(3n^* + b_0) \;\equiv\; \left\{\begin{matrix} s(n^*) & \text{falls } b_0 = 0 \\ s(n^*)+1 & \text{falls } b_0 = 1 \\ s(n^*) & \text{falls } b_0 = 2 \end{matrix}\right\} \bmod 3.$$

Wir setzen $f(0) = f(2) = 0$ und $f(1) = 1$, mit wiederholter Anwendung dieser Gleichung mit n^*, $(n^*)^*$, $((n^*)^*)^*$, ... kann man dann schreiben

$$s(n) \equiv s(n^*) + f(b_0) \;\equiv\; s((n^*)^*) + f(b_1) + f(b_0) \;\equiv\; \ldots \equiv\; s(b_m) + \sum_{j=0}^{m-1} f(b_j) \bmod 3.$$

Falls $b_m = 1$, ist $s(n) \equiv s(1) + (e(n) - 1)\cdot 1 \equiv 1 + (e(n) - 1) \equiv e(n) \bmod 3$, und falls $b_m = 2$, erhalten wir ebenfalls $s(n) \equiv s(2) + e(n)\cdot 1 \equiv e(n) \bmod 3$; weitere Fälle gibt es nicht. Das war zu zeigen.

1. Beweis zu b) (vollst. Induktion): Inspiriert von Lemma 2(3) suchen wir zunächst ein n_0 derart, dass sowohl $s(n_0) \equiv 0 \bmod 27$ als auch $3(n_0 + 1)^2 \equiv 0 \bmod 27$. Dann ist nämlich auch $s(3n_0 + 2) = s(n_0) + 3(n_0 + 1)^2$ als Summe zweier durch 27 teilbarer Zahlen ebenfalls durch 27 teilbar.

Nun gilt $3(n_0 + 1)^2 \equiv 0 \bmod 27$ genau dann, wenn 9 Teiler von $(n_0 + 1)^2$ ist, also wenn 3 Teiler von $n_0 + 1$ ist, d.h. wenn $n_0 \equiv 2 \bmod 3$. Es genügt also, $n_0 \equiv 2 \bmod 3$ zu untersuchen. Mit $n_1 := 3n_0 + 2 \equiv \bmod 3$ haben wir dann eine zweite Zahl n_1 mit $s(n_1) \equiv 0 \bmod 27$ gefunden, induktiv folgt also aus $s(n_0) \equiv 0 \; mod\; 27$, dass $s(n_{i+1}) \equiv 0 \bmod 27$ für alle $n_{i+1} := 3n_i + 2$ $(i \geq 0)$.

Schon $n_0 = 20 = 3\cdot 6 + 2$ ist geeignet, denn mit Lemma 2 gilt

$$s(n_0) = s(3\cdot 6 + 2) = s(6) + 3(6 + 1)^2 = s(2) + 3\cdot 2^2 + 147 = 162 = 27\cdot 6 \equiv 0 \bmod 27.$$

Es bleibt noch zu bemerken, dass die n_i alle verschieden sind, da streng monoton wachsend mit i.

Bemerkungen: Es gilt $n_i = 7\cdot 3^{i+1} - 1$ für alle $i \geq 0$.

1. Nachweis: Es ist $n_0 = 20 = 7\cdot 3^{0+1} - 1 = 2\cdot 9 + 0\cdot 3 + 2\cdot 1$, die Darstellung im Dreiersystem ist also $n_0 = 202|_3$. Die Zahl $n_{i+1} = 3n_i + 2$ entsteht aus n_i, indem wir im Dreiersystem an die Zahl n_i die Ziffer 2 anhängen. Hieraus folgt sofort, dass

$$n_i = 20\underbrace{2.....2}_{i+1 \text{ Ziffern } 2}|_3 = 21\underbrace{0.....0}_{i+1 \text{ Ziffern } 0}|_3 - 1 = (2\cdot 3 + 1)\cdot 3^{i+1} - 1 = 7\cdot 3^{i+1} - 1 \text{ für alle } i \geq 0.$$

2. Nachweis: Sei $c_i := n_i + 1$. Dann ist $c_{i+1} = 3n_i + 2 + 1 = 3(n_i + 1)$. Mit $c_0 = 21 = 7\cdot 3$ ergibt sich sofort $c_i = 7\cdot 3^{i+1}$, also $n_i = 7\cdot 3^{i+1} - 1$ $(i \geq 0)$.

Die oben beschriebene Konstruktion kann lt. Berechnung mit Excel mit mehreren möglichen Startwerten durchgeführt werden, z.B. $n_0 \in \{20, 383, 419, 566, 767, 797, 959, 983, 995, \ldots\}$. Diese Ansätze führen aber nicht zu allen möglichen n mit $27|s(n)$.

2. Beweis zu b): Wir werden zeigen, das für alle Zahlen

$$b_m := {}^1\!/_2 \cdot (3^m - 1) = \sum_{j=0}^{m-1} 3^j = \underbrace{11 \ldots 1}_{m\ \text{Stellen}}|_3 \ \text{ mit } m = m(k) = 27k - 3 \ \text{ und } \ k \geq 1$$

die Zahl $s(b_m)$ durch 27 teilbar ist.

Offensichtlich gilt $b_{m+1} = 3b_m + 1$. Weiter gilt $s(b_m) \equiv 1 + 7(m-1) \bmod 27$ für alle positive ganze Zahlen m, was wir schnell mit vollständiger Induktion zeigen: Die Aussage ist richtig für $m = 1$ und $m = 2$, weil $s(b_1) = s(1) = 1 + 7 \cdot (1 - 1) = 1$ und $s(b_2) = s(11|_3) = s(4) = 1 + 2 + 1 + 4 = 8 = 1 + 7 \cdot (2 - 1)$; und wenn sie richtig ist für ein bestimmtes $m \geq 2$, dann ist sie auch richtig für $m + 1$, denn mit Lemma 2(2) gilt

$$\begin{aligned} s(b_{m+1}) &= s(3b_m + 1) = s(b_m) + 3(b_m)^2 + 3b_m + 1 = s(b_m) + 3(3b_{m-1} + 1)^2 + 3(3b_{m-1} + 1) + 1 \\ &= s(b_m) + 27b_{m-1}^{\ 2} + 18b_{m-1} + 3 + 9b_{m-1} + 3 + 1 \\ &= s(b_m) + 27b_{m-1}^{\ 2} + 27b_{m-1} + 7 \equiv 1 + 7(m-1) + 7 \bmod 27 \\ &\equiv 1 + 7((m+1) - 1) \bmod 27. \end{aligned}$$

Nun wählen wir $m = m(k) = 27k - 3$ ($k \geq 1$), dann ist $s(b_{m(k)}) \equiv 1 + 7(27k - 4) \equiv 1 + 7 \cdot 27 - 28 \equiv 0 \bmod 27$; dies sind unendlich viele verschiedene Zahlen, da $b_{m(k)}$ streng monoton wächst mit k.

Bemerkung: Die kleinste so konstruierte Zahl ist $b_{(27-3)} = \sum_{j=0}^{23} 3^j = {}^1\!/_2 \cdot (3^{24} - 1) = 141\,214\,768\,240$.

3. Beweis zu b) (wie 2. Beweis mit Verallgemeinerung der Aussage): Wir zeigen, dass es für alle $d \geq 1$ unendlich viele m gibt, für die $3^d \mid s(b_m)$.

Zunächst zeigen wir: Für alle $m \geq a \geq 1$ gilt $s(b_{m+1}) \equiv s(b_m) + c_a \bmod 3^{2a+1}$ mit $c_a = 1 + 6 \cdot \sum_{j=0}^{a-1} 3^{2j}$.

Mit Lemma 2(2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} s(b_{m+1}) &= s(b_m) + 3b_m^2 + 3b_m + 1 = s(b_m) + 3\left(\frac{3^m - 1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3^m - 1}{2}\right) + 1 \\ &= s(b_m) + 3\left(\frac{3^m - 1}{2}\right)\left(\frac{3^m + 1}{2}\right) + 1 = s(b_m) + \frac{3}{2}\left(\frac{3^{2m} - 1}{2}\right) + 1 = s(b_m) + \frac{3}{2} \cdot \sum_{j=0}^{2m-1} 3^j + 1 \\ &= s(b_m) + \frac{3}{2} \cdot \sum_{j=0}^{m-1}\left(3^{2j+1} + 3^{2j}\right) + 1 = s(b_m) + \frac{3}{2} \cdot \sum_{j=0}^{m-1}\left(4 \cdot 3^{2j}\right) + 1 = s(b_m) + 6 \cdot \sum_{j=0}^{m-1}\left(3^{2j}\right) + 1 \\ &= s(b_m) + 1 + 6 \cdot \sum_{j=0}^{a-1} 3^{2j} + 6 \cdot 3^{2a} \sum_{j=0}^{m-a-1} 3^{2j} \equiv s(b_m) + 1 + 6 \cdot \sum_{j=0}^{a-1} 3^{2j} \bmod 3^{2a+1}. \end{aligned}$$

Induktiv folgt sofort, dass für alle $t \geq 1$ gilt: $s(b_{m+t}) \equiv s(b_m) + t \cdot c_a \bmod 3^{2a+1}$ (*)

Nun ist $c_a \equiv 1 \bmod 3$, also sind c_a und 3^{2a+1} teilerfremd. Damit durchlaufen die Werte $t \cdot c_a$ für $t = 0, 1, 2, \ldots, 3^{2a+1} - 1$ alle Restklassen $\mathit{mod}\ 3^{2a+1}$. Wären nämlich zwei Restklassen gleich für $0 \leq t_1 < t_2 < 3^{2a+1}$, dann wäre $(t_2 - t_1) \cdot c_a \equiv 0 \bmod 3^{2a+1}$ und wegen der Teilerfremdheit von c_a und 3^{2a+1} sogar $t_2 - t_1 \equiv 0 \bmod 3^{2a+1}$; dies widerspricht $0 \leq t_1 < t_2 < 3^{2a+1}$.

Es gibt also ein t_0, für das $s(b_m) + t_0 \cdot c_a \equiv 0 \bmod a.\ 3^{2a+1}$, dies ist auch gültig, wenn man t_0 ersetzt durch $t_0 + k \cdot 3^{2a+1}$. Hieraus folgt sofort $s(b_m) \equiv 0 \bmod 3^{2a+1}$ für alle $m \geq a$.

Nun wählen wir zu einem vorgegebenem ungeraden $d \geq 1$ ein $a \geq 1$ mit $2a + 1 \geq d$ und ein $m \geq a$, bestimmen hieraus das oben erwähnte t_0. Dann gilt für die unendlich vielen Werte m^*:

Für alle $m^* = m + t_0 + k \cdot 3^{2a+1}$ gilt $s(b_{m^*}) \equiv 0 \bmod 3^d$.

Hinweis: Für $d = 3$ wählen wir $a = 1$, $m = 1$, damit ist $s(b_m) = s(1) = 1$ und $c_a = 1+6\cdot\sum_{j=0}^{a-1}3^{2j} = 7$; es ergibt sich $t_0 = 23$, weil $1 + 7\cdot(27 - 4) \equiv 1 - 28 \equiv 0 \bmod 27$. Dann ist wie oben $m^* = 1 - 4 + k \cdot 27$ für $k \geq 1$..

4. Beweis zu b): Wir werden zeigen, dass $s(3^k + 16)$ für alle $k \geq 5$ durch 27 teilbar ist. Da $3^k + 16$ streng monoton wachsend mit k ist, sind dies unendlich viele Zahlen. (Es ist $3^k + 16 = 10...0121|_3$ mit mindestens zwei Ziffern 0.)

Zum Nachweis folgern wir zunächst aus Lemma 2(1):

Lemma 4: Für alle $d \geq 1$ und $M \geq 0$ gilt $s(3^{d+M}) \equiv s(3^d) \bmod 3^d$.

Dies folgt sofort mit vollständiger Induktion nach M (bei festem d): Für $M = 0$ ist die Aussage trivialerweise richtig, und wenn sie richtig ist für ein bestimmtes $M \geq 0$, dann gilt zusammen mit Lemma 2(1)

$$s(3^{d+M+1}) = s(3 \cdot 3^{d+M}) = s(3^{d+M}) + 3\cdot(3^{d+M})^2 \equiv s(3^{d+M}) + 3^{(d+2+2M+1)} \cdot 3^d \equiv s(3^d) \bmod 3^d.$$

Für $d = 3$ berechnen wir die Restklasse von $s(3^d) \bmod 3^d$ schnell mit Lemma 1(1):

$s(3^3) = s(3 \cdot 3^2) = s(3^2) + 3 \cdot 3^4 = s(3) + 3 \cdot 3^2 + 3^5 = s(1) + 3 \cdot 1^2 + 3^3 + 3^5 \equiv 4 \bmod 3^3$, also gilt

Für alle $k \geq 3$ ist $s(3^k) \equiv 4 \bmod 27$.

Nun ist $s(3^k + 16) = s(3^k) + \sum_{j=1}^{16} a\left(3^k + j\right) = s(3^k) + \sum_{j\in A}\left(3^k + j\right) + \sum_{j\in B}\left(3^{k-1} + \frac{j}{3}\right) + \sum_{j\in C}\left(3^{k-2} + \frac{j}{9}\right)$,

wobei $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16\}$, $B = \{3, 6, 12, 15\}$ und $C = \{9\}$; diese Aufspaltung und Berechnung der $a(3k + j)$ ist möglich, weil $k \geq 5$, d.h. unter den Zahlen $3^k + i$ mit $1 \leq i \leq 16 < 3^3$ ist keine, deren Primfaktorzerlegung die Primzahl 3 mehr als zwei Mal enthält. Somit können wir die Restklasse von $s(3^k + 16) \bmod 27$ bestimmen:

$$\begin{aligned} s(3^k + 16) &\equiv 4 + (1+14) + (2+13) + ... + (7+8) + 16 + 1+2+4+5 + 1 \\ &\equiv 4 + 5 \cdot 15 + 16 + 13 \equiv 75 + 29 \equiv 104 \equiv 4 \cdot 27 \equiv 0 \bmod 27. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

Bemerkungen: Die kleinste so konstruierte Zahl ist 259 (für $k = 5$); es gilt $27|s(259)$.

Anwendung mit $k = 4$ führt zu einem falschen Ergebnis, weil $a(3^3 + 9) = a(90) \equiv 10 \bmod 27$, aber ... $\equiv 1 \bmod 9$ ist. Eine analoge Suche "von Hand" führt aber zum Ergebnis, dass $s(3^4 + 10) = s(91) \equiv 0 \bmod 27$. Übrigens ist 91 kleinste Zahl aus Restklasse $1 \bmod 3$ mit dieser Eigenschaft.

Ohne Kenntnis, dass $s(3^k) \equiv 4 \bmod 27$ für alle $k \geq 3$, können wir einen reinen Existenzbeweis führen (hier nur skizzenhaft dargestellt): Die Restklasse mod 27 einer Zahl z ist bestimmt durch die Zahl, die aus den letzten 3 Ziffern von z (bei Darstellung im 3−er−System) gebildet wird. Für $k \geq 5$ hat 3^k mindestens 5 Nullen am Ende, d.h. falls r nicht mehr als 5 Stellen hat, gilt $s(3^k + r) \equiv s(3^k) + s(r) \bmod 27$. Dies ist für r mit $0 \leq r \leq 103 = 10211|_3$ der Fall; wir rechnen von Hand nach, dass für diese r unter den $s(r)$ alle Restklassen mod 27 vorkommen. Insbesondere gibt es eines dieser r so, dass $s(r) \equiv -s(3^k) \bmod 27$.

5. Beweis zu b): Wir werden allgemeiner zeigen (die Aussage folgt dann für $d = 3$):

Für alle $m \geq 1$, $d \geq 1$gilt: Für $n = n(m,d) = \sum_{j=1}^{m3^d} 3^{jd}$ ist $s(n) \equiv 0 \bmod 3^d$,

Wir stellen zu vorgegebenen Zahlen u, k mit $k < 3^u$ die Zahl k in der eindeutig bestimmten Form $k = 3^{r(k)}\cdot t(k)$ mit $\text{ggT}(3,t) = 1$ dar. Es ist dann $r(k) < u$, also $u - r(k) \geq 1$ und somit $3^{u-r(k)}$ durch 3 teilbar. Dann ist $k + 3^u = 3^{r(k)}\cdot(t(k) + 3^{u-r(k)})$; und weil $t(k)$ nicht durch 3 teilbar ist, aber $3^{u-r(k)}$ schon, gilt $\text{ggT}(3,t(k) + 3^{u-r(k)}) = 1$. Damit ist $t(k) + 3^{u-r(k)}$ der größte nicht durch 3 teilbare Teiler von $k + 3^u$. Also gilt

$$a(k + 3^u) - a(k) = t(k) + 3^{u-r(k)} - t(k) = 3^{u-r(k)} \text{ für alle } k < 3^u.$$

Nun betrachten wir eine weitere Dreierpotenz 3^v mit $v \geq u$. Dann ist für alle $k = 1, 2, ..., n < 3^u$ der Ausdruck $a(k + 3^v) - a(k)$ ein Vielfaches von 3^{v-u+1}, denn es gilt

$$a(k + 3^v) - a(k) = t(k) + 3^{v-r(k)} - t(k) = 3^{v-r(k)} \text{ mit } r(k) < u \leq d, \text{ d.h. } v - r(k) \geq v - u + 1.$$

Dies gilt dann auch für die Summe dieser Ausdrücke, d.h. es ist

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a\left(k+3^{v}\right)-a\left(k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}a\left(k+3^{v}\right)-\sum_{k=1}^{n}a\left(k\right) = \sum_{k=1}^{n+3^{v}}a\left(k\right)-\sum_{k=1}^{3^{v}}a\left(k\right)-\sum_{k=1}^{n}a\left(k\right) = s(n+3^v)-[s(3^v)+s(n)]$$

ein Vielfaches von 3^{v-u+1}. Damit gilt folgendes Lemma:

Lemma 5: Für alle $n < 3^u$, $v \ge u$ gilt: $s(n+3^v) \equiv s(n) + s(3^v) \bmod 3^{v-u+1}$.

Nun wählen wir $v := (K+1)d \ge u := Kd + 1$, also $v - u + 1 = (K+1)d - (Kd+1) + 1 = d$ und $n = n(K;d) = \sum_{j=1}^{K} 3^{jd} < 3^{Kd+1} = 3^v$. Dann können wir mit vollständiger Induktion zeigen:

Für alle $K \ge 1$gilt: $s\left(\sum_{j=1}^{K}3^{jd}\right) \equiv K \cdot s\left(3^{d}\right) \bmod 3^d$ (*)

Für $K = 1$ ergibt sich nämlich mit Lemma 4 schnell $s\left(\sum_{j=1}^{1}3^{jd}\right) = s(3^d) \equiv 1 \cdot s(3^d) \bmod 3^d$; und wenn die Aussage richtig ist für ein bestimmtes $K \ge 1$, dann ergibt sich zusammen mit Lemma 5 und Lemma 4 die Gültigkeit der Aussage für $K + 1$:

$$s\left(\sum_{j=1}^{K+1}3^{jd}\right) = s\left(\sum_{j=1}^{K}3^{jd}+3^{(K+1)d}\right) \equiv s\left(\sum_{j=1}^{K}3^{jd}\right) + s\left(3^{(K+1)d}\right) \bmod 3^d \equiv K \cdot s(3^d) + s(3^d) \bmod 3^d$$

$$\equiv (K+1) \cdot s(3^d) \bmod 3^d.$$

Schließlich wählen wir $K \equiv 0 \bmod 3^d$, z.B. $K = m3^d$ mit $m = 1, 2, 3, ...$) und sind fertig: Für die unendlich vielen Zahlen $n(m) = \sum_{j=1}^{m3^d}3^{jd}$ gilt $s(n) = s\left(\sum_{j=1}^{m3^d}3^{jd}\right) \equiv m3^d \cdot s\left(3^d\right) \equiv 0 \bmod 3^d$.

Bemerkungen: Aus $d' \ge d$ und $N(d') = \sum_{j=1}^{3^{d'}}3^{jd'} \equiv 0 \bmod 3^{d'}$ folgt $N(d') = \sum_{j=1}^{3^{d'}}3^{jd'} \equiv 0 \bmod 3^d$. Der Nachweis von (*) mit der Wahl $K = 3^d$ genügt also, die Einführung der Variablen m ist also eigentlich unnötig.

Die Darstellung der $n(m)$ im Dreiersystem besteht aus $m \cdot 3^d$ aneinander gereihten Zifferblöcken 100...0 mit jeweils $d - 1$ Ziffern 0 und einer zusätzlichen Ziffer 0 am Ende. Für $d = 3$ erhalten wir $n_1 \approx 4{,}60 \cdot 10^{38}$ (DERIVE).

Im Internet findet man unter https://www.oeis.org die Folge der $a(k)$ unter der Bezugnummer A038502 ("Remove 3's from n"), die Folge der $a(k) \bmod 3$ unter A060236 zusammen mit interessanten Bezügen zu anderen Themen.