

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2022

Vorläufige Fassung
für die
Homepage

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: August 2022

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung



STIFTERVERBAND



KULTUSMINISTER
KONFERENZ



Aufgabe 1: Bestimme alle Quadrupel (a,b,c,d) positiver reeller Zahlen, die die beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$ab + cd = 8, \quad (1)$$

$$abcd = 8 + a + b + c + d. \quad (2)$$

Ergebnis: Das Quadrupel $(a,b,c,d) = (2,2,2,2)$ ist das einzige Quadrupel positiver reeller Zahlen, das beide Gleichungen erfüllt.

Als bekannt setzen wir die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel positiver reeller Zahlen voraus; hier kurz formuliert und der Vollständigkeit halber nochmals bewiesen:

AM \geq GM: Für alle positive Zahlen x,y gilt: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, und $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow x = y$.

Beweis: Es ist $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y$, also $x + y \geq 2\sqrt{xy}$; Gleichheit genau für $x = y$; dies ist äquivalent zur Behauptung.

1. Beweis: Sei (a,b,c,d) ein Quadrupel positiver Zahlen, die (1) und (2) erfüllen. Dann folgt nach Quadrieren beider Seiten von (1) und Multiplikation beider Seiten von (2) mit 4

$$\begin{aligned} (ab + cd)^2 &= 8^2 \\ 4 \cdot (abcd) &= 4 \cdot 8 + 4(a + b + c + d) \end{aligned}$$

und es folgt nach Subtraktion $0 \leq (ab - cd)^2 = 32 - 4(a + b + c + d)$, also

$$a + b + c + d \leq 8, \quad \text{Gleichheit genau dann, wenn } ab = cd. \quad (*)$$

Dies setzen wir wiederum ein in (2) und erhalten

$$abcd = 8 + a + b + c + d \leq 16, \quad \text{Gleichheit genau dann, wenn } ab = cd. \quad (**)$$

Andererseits ergibt zweimalige Anwendung von $AM \geq GM$

$a + b + c + d \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \geq 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\sqrt{abcd}}$, Gleichheit genau dann, wenn $a = b$ und $c = d$ und auch $ab = cd$, also $a = b = c = d$.

was wir wiederum in (2) einsetzen:

$$abcd \geq 8 + 4 \cdot \sqrt[4]{abcd}, \quad \text{Gleichheit genau dann, wenn } a = b = c = d. \quad (***)$$

Falls $abcd = 16$, gilt offensichtlich Gleichheit.

Der Graph der zur linken Seite von (***) gehörenden Funktion $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(P) = P$, ist eine Ursprungsgerade mit Steigung 1, und der Graph der zur rechten Seite gehörenden Funktion $f_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_2(P) = 8 + \sqrt[4]{P}$ ist ein bei $(8|0)$ beginnender rechtsgekrümmter Parabelast mit waagerechter Achse. Da für $P = 16$ offensichtlich $f_1(P) = f_2(P)$ gilt, haben die beiden Graphen einen Schnittpunkt $(16|16)$. Dies ist auch der einzige Schnittpunkt, was sofort aus der Form der beiden Graphen folgt. Für $P < 16$ ist die rechte Seite größer als die linke, für $P = 16$ herrscht Gleichheit, für $P > 16$ ist die linke Seite größer als die rechte, die Ungleichung (***) ist also nur für $P \geq 16$ erfüllt und es gilt notwendigerweise $abcd \geq 16$.

Zusammen mit (**) folgt also $abcd = 16$, und weiter $a = b = c = d = 2$.

Kurze Probe im Kopf zeigt, dass diese Werte tatsächlich die Gleichungen (1) und (2) erfüllen.



2. Beweis (letztlich gleiche Gedanken wie im 1. Beweis): Teil1: Das Quadrupel $(a,b,c,d) = (2,2,2,2)$ ist ein Quadrupel positiver Zahlen und erfüllt die beiden Gleichungen (1) und (2), denn es ist tatsächlich

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8 \quad \text{und} \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 8 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

Teil 2: Es gibt keine andere Lösung: Sei (a,b,c,d) ein Quadrupel, das Gleichung (1) und (2) erfüllt. O.B.d.A. sei $ab \geq cd$. Aus Gleichung (1) folgt dann, dass es eine Zahl $x \geq 0$, gibt mit $ab = 4 + x$ und $cd = 4 - x$. Mit $AM \geq GM$ folgt weiter, dass

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{4+x} \quad \text{und} \quad \frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd} = \sqrt{4-x}, \quad \text{Gleichheit genau für } a=b \text{ und } c=d. \quad (3)$$

Durch Addition ergibt sich dann $a + b + c + d \geq 2(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})$.

Zusammen mit Gleichung (2) ergibt sich hieraus dann

$$a + b + c + d = abcd - 8 = (4+x) \cdot (4-x) - 8 = 8 - x^2, \text{ also}$$

$$4 - \frac{x^2}{2} \geq \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}. \quad (4)$$

Für $x = 0$ herrscht offensichtlich Gleichheit und wir werden zeigen, dass für alle $x > 0$ die Ungleichung nicht erfüllt ist. Dann wissen wir, dass $x = 0$, also $ab = cd = 4$, und weil in (3) Gleichheit genau für $a = b$ und $c = d$ gegeben ist, folgt $a = b = c = d = 2$.

Es kann nicht $|x| > 2$ sein: Andernfalls wäre $2 \geq 4 - \frac{x^2}{2} \geq \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} \geq \sqrt{4+x} \geq \sqrt{6} > 2$.

Es kann nicht $0 < x \leq 2$ sein: Mit $AM \geq GM$ folgern wir aus (4)

$$\left(2 - \frac{x^2}{4}\right) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}) \geq \sqrt{\sqrt{(4+x)(4-x)}} = \sqrt[4]{16-x^2}$$

und folgern durch doppeltes Quadrieren beider Seiten (beide sind nicht negativ) und Division durch $x^2 > 0$:

$$\left(2 - \frac{x^2}{4}\right)^4 \geq 16 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2^4 - 4 \cdot 2^3 \cdot \frac{x^2}{4} + 6 \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^4 \geq 16 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8x^2 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{256} \geq 16 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{256} \geq 7.$$

Für $0 < x \leq 2$ ist aber $\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{256} < x^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{x^4}{256}\right) \leq 6,25 < 7$; Widerspruch.



Aufgabe 2: Auf dem Tisch liegen 2022 Streichhölzer und ein handelsüblicher Spielwürfel, bei dem die Augenzahl a oben liegt. Nun spielen Max und Moritz folgendes Spiel:

Sie nehmen abwechselnd nach folgender Regel Streichhölzer weg, wobei Max beginnt: Wer am Zug ist, kippt den Würfel über eine Kante seiner Wahl und nimmt dann genau so viele Streichhölzer weg, wie die nun oben liegende Seite des Würfels anzeigt. Wer keinen regelgerechten Zug mehr ausführen kann, hat verloren.

Für welche a kann Moritz erzwingen, dass Max verliert?

Anmerkung: Die Richtigkeit der Antwort ist zu begründen.

Hinweis: Auf den Seiten eines handelsüblichen Würfels stehen die Augenzahlen 1 bis 6, wobei die Summe der Augenzahlen gegenüber liegender Seiten stets 7 beträgt.

Antwort: Moritz kann für kein obenliegendes a den Gewinn erzwingen.

1. Beweis (Angabe einer Gewinnstrategie für Max): Mit dem Zweitupel $(n|a)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$, $a \in \{1, 2, \dots, 6\}$) beschreiben wir die Situation, dass n Streichhölzer auf dem Tisch liegen und beim Würfel die Augenzahl a oben liegt.

Liegt bei dem Würfel die Zahl a oben, so kann man beim Kippen über eine Kante eine der vier Augenzahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, 6\} \setminus \{a, 7-a\}$ nach oben bringen, und keine andere. Insbesondere kann man immer eine der beiden Zahlen 1 oder 2 nach oben bringen, dabei die Zahl 1 nur, wenn vor dem Kippen weder 1 noch 6 oben liegen. Damit sind die Situationen $(1|1)$, $(1|6)$ sowie $(0|a)$ mit $a \in \{1, 2, \dots, 6\}$ die einzigen, in denen man nicht mehr regelgerecht ziehen kann. Wer vor seinem Zug diese Situationen vorfindet, hat also verloren.

Ein siegreiche Strategie von Max ist:

Kippe den Würfel immer so, dass Moritz vor seinem Zug eine der Situationen
 $(9k|a)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$, $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, oder
 $(9k+z|w)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$, $z \in \{3, 4, 8\}$, $w \in \{3, 4\}$ vorfindet.

Nachweis, dass diese Strategie durchführbar ist und zum Sieg führt: Beim ersten Zug kann Max unabhängig von der oben liegenden Augenzahl den Würfel stets so kippen, dass eine der Augenzahlen 6 oder 3 oben liegt. Also kann er so ziehen, dass Moritz vor seinem ersten Zug eine der beiden Situationen $(2022-6|6) = (224 \cdot 9|6)$ oder $(2022-3|3) = (224 \cdot 9+3|3)$ vorfindet. Die Bedingung der Strategie ist für diese beiden Situationen mit $k = 224$, $a = 6$ bzw. $k = 224$, $z = w = 3$ erfüllt.

Im Weiteren reagiert Max auf jeden Zug von Moritz folgendermaßen (man macht sich leicht klar, dass die jeweils angegebenen Züge auch stets möglich sind und dass die Bedingungen der Strategie jeweils erfüllt sind):

Falls Moritz $(9k|a)$ vorfindet:

Für $k = 0$ hat Moritz nach oben Gesagtem verloren.

Für $k \geq 1$ gilt: Kippt Moritz auf 3 oder 4, kippt Max auf 6 bzw. 5; und kippt Moritz auf 5 oder 6, kippt Max auf 4 bzw. 3. In beiden Fällen werden im Doppelzug 9 Streichhölzer weggenommen, d.h. Moritz steht danach vor $(9(k-1)|a')$ mit $k \geq 1$, $a' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kippt Moritz auf 1 oder 2, dann kippt Max auf 4 bzw. 3; dann steht Moritz vor $(9k-5|4) = (9(k-1)+4|4)$ bzw. $(9(k-1)+4|3)$.

Falls Moritz $(9k+3|3)$ oder $(9k+3|4)$ vorfindet:

Moritz kann jetzt nicht auf 3 oder 4 kippen und im Fall $k = 0$ auch nicht auf 5 oder 6. Kippt Moritz auf 1 oder 2, kippt Max auf 2 bzw. 1, dann steht Moritz vor $(9k|a')$, $a' \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und hat für $k = 0$ verloren. Falls $k \geq 1$ und Moritz auf 5 oder 6 kippt, kippt Max auf 4 bzw. 3, dann steht Moritz vor $(9(k-1)+3|4)$ oder $(9(k-1)+3|3)$.



Falls Moritz $(9k+4|3)$ oder $(9k+4|4)$ vorfindet:

Moritz kann nicht auf 3 oder 4 kippen und im Fall $k = 0$ auch nicht auf 5 oder 6. Kippt Moritz auf 1, so kippt Max auf 3, dann steht Moritz vor $(9k|a')$. Ist $k \geq 1$ und kippt Moritz auf 5 oder 6, kippt Max auf die 4 bzw. 3, dann steht Moritz vor $(9(k-1)+4|4)$ bzw. auf $(9(k-1)k+4|3)$. Kippt Max auf 2, so kippt im Fall $k = 0$ Max auf 1, dann steht Moritz auf $(1|1)$ und hat verloren; und im Fall $k \geq 1$ kippt Max auf die 3, dann steht Moritz vor $(9(k-1)+8|3)$.

Falls Moritz vor $(9k+8|3)$ oder $(9k+8|4)$ steht:

Moritz kann nicht auf 3 oder 4 kippen. Kippt Moritz auf 1, so kippt Max auf die 3, dann steht Moritz vor $(9k+4|3)$; kippt Moritz auf die 2, 5 oder 6, kippt Max auf die 6 bzw. 3 bzw. 2, dann steht Moritz vor $(9k|a')$.

Schließlich sei noch bemerkt, dass mit jedem Zug mindestens ein Streichholz vom Tisch genommen wird, d.h. das Spiel endet nach endlich vielen Zügen. Da Max immer ziehen kann ohne zu verlieren, ist am Ende stets Moritz der Verlierer.

Bemerkung: Die Strategie gilt so nur für spezielle Ausgangssituationen, weil die Angabe von Gewinn- und Verlustfeldern nicht vollständig ist. Im folgenden Beweis wird eine vollständige Angabe hergeleitet.

2. Beweis (vollständige Analyse des Spieles): Liegt bei dem Würfel die Zahl a oben ($a \in \{1, 2, \dots, 6\}$), so kann man offensichtlich beim Kippen über eine Kante genau eine der vier Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, 6\} \setminus \{a, 7-a\}$ nach oben bringen. Insbesondere liegt nach dem Kippen weder a noch $7-a$ oben und es ist stets möglich, eine der beiden Zahlen 1 oder 2 mit dem Kippen nach oben zu bringen.

Wir beschreiben in eineindeutiger Weise das Spiel als Ziehen eines Spielsteins durch die Felder einer 2023×6 -Tabelle, vgl. Abbildung. (Die Ergänzung der Tabelle um die Zeilen -1 bis -6 ist hier nicht relevant; dies dient der Erstellung mit dem Computer; dies wird am Schluss erklärt.) Die Situation "Auf dem Tisch liegen n Streichhölzer ($0 \leq n \leq 2022$) und beim Würfel liegt die Zahl a ($a \in \{1, 2, \dots, 6\}$) oben" beschreiben wir durch "Der Spielstein liegt auf dem Feld $(n|a)$, d.h. auf dem Feld in Zeile n und Spalte a ". Jeder mögliche Zug entspricht dann einem Ziehen des Spielfeldes vom Feld $(n|a)$ in eines der Felder $(n-i|i)$ mit $i \in \{1, 2, \dots, 6\} \setminus \{a, 7-a\}$, dabei ist ein Zug nur dann regelgerecht, wenn $n-i \geq 0$ ist. Regelgerechte Züge führen also auf genau die vier Felder, die auf der schrägen Linie $(n-1|1)$, $(n-2|2)$, \dots , $(n-6|6)$ liegen, aber nicht in der Spalte a und auch nicht in der Spalte $7-a$. In der Tabelle ist dies für $n = 12$ dargestellt: Aus jedem Feld mit den weißen Zahlen kann man in eines von vier Feldern auf der Diagonalen mit den gelben Zahlen ziehen.

Jeder Zug führt in ein Feld mit niedrigerer Zeilennummer, und da man den Würfel stets so kippen kann, dass eine der beiden Augenzahlen 1 oder 2 oben liegt, kann man einen Stein, der in einem Feld $(n|a)$ mit $n \geq 2$ und beliebigem a liegen, stets regelgerecht ziehen. Die einzigen Felder, aus denen kein regelgerechter Zug mehr möglich ist, sind demnach die Felder in Zeile 0 und die beiden Felder $(1|1)$ und $(1|6)$. Wer vor seinem Zug den Stein in einem dieser Felder vorfindet, hat also verloren, deswegen nennen wir diese Felder Verlustfelder und färben sie rot. Wer vor seinem Zug den Stein auf einem Feld vorfindet, von dem er mit einem regelgerechten Zug auf mindestens eines dieser Verlustfelder ziehen kann, kann mit solch einem Zug den Gewinn erzwingen und hat gewonnen, solche Felder nennen wir Gewinnfelder und färben sie grün. So sind z.B. alle Felder in Zeile 1 außer $(1|1)$ und $(1|6)$ grün, ebenso alle Felder in Zeile 2. Andererseits gilt: Wenn jemand vor seinem Zug seinen Stein auf einem Feld vorfindet, von dem er nur auf Gewinnfelder ziehen kann, kann sein Gegner den Sieg erzwingen, solche Felder nennen wir ebenfalls Verlustfelder und färben sie rot; entsprechend sind Felder, von denen man mindestens ein rotes Feld erreichen kann, Gewinnfelder, die grün gefärbt werden. So fahren

	a					
	1	2	3	4	5	6
n						
-6						1
-5					1	1
-4				1	1	1
-3			1	1	1	1
-2		1	1	1	1	1
-1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1	1
4	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1
12	1	1	0	0	1	1
13	1	1	0	0	1	1
14	1	0	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	0	0	1	1
18	0	0	0	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1
21	1	1	0	0	1	1
22	1	1	0	0	1	1
23	1	0	1	1	0	1
24	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1
26	1	1	0	0	1	1
27	0	0	0	0	0	0
28	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1
30	1	1	0	0	1	1
31	1	1	0	0	1	1
32	1	0	1	1	0	1
33	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1



wir zeilenweise fort, bis alle Felder der Tabelle gefärbt sind; dies ist möglich, da alle Züge in Zeilen mit niedriger Nummer führen, und diese Felder sind dann schon alle gefärbt.

Eine solche Färbung (vgl. Tabelle) wurde mit einem Computerprogramm erstellt; der Nachweis für deren Richtigkeit wird unten ohne Hilfe eines Computers durchgeführt. Die Färbung wiederholt sich ab Zeile zwei periodisch mit Periodenlänge 9.

Man kann die Färbung auch mit Koordinaten beschreiben:

Rot sind:
 die Felder $(1|1)$ und $(1|6)$,
 für alle $k = 0, 1, 2, \dots$
 alle Felder in Zeile $9k$,
 alle Felder $(9k+3|3)$, $(9k+3|4)$, $(9k+4|3)$, $(9k+4|4)$, $(9k+5|2)$, $(9k+5|5)$,
 $(9k+8|3)$, $(9k+8|4)$,
 alle anderen Felder sind grün.

Man erhält so die Strategie des 1. Beweises und zusätzlich, dass die Felder $(9k+5|2)$ und $(9k+5|5)$ Verlustfelder sind und alle anderen Gewinnfelder.

Es ist $2022 = 9 \cdot 224 + 6$, d.h. alle Felder der Zeile 2022 sind – wie alle Felder der Zeile 6 – grün. Da der Spielstein zu Beginn in einem Feld dieser Zeile liegt und Max den ersten Zug hat, kann Max für jedes oben liegende a erzwingen, dass Moritz verliert, und Moritz kann für kein a erzwingen, dass Max verliert.

Um nachzuweisen, dass alle Felder korrekt gefärbt sind, genügt es zu zeigen:

- (A) Von jedem grünen Feld ist ein regelgerechter Zug auf ein rotes Feld möglich.
- (B) Von jedem roten Feld ist entweder kein regelgerechter Zug möglich oder jeder regelgerechte Zug führt auf ein grünes Feld.

Mit Ausnahme der Zeilen 0 und 1 wiederholt sich das Farbmuster alle neun Zeilen, d.h. die Felder $(n|a)$ und $(n+9k|a)$ sind für $n \geq 2$, $k \geq 0$ beide Gewinnfelder oder beide Verlustfelder. Damit genügt es, die Nachweise für (A) und (B) zunächst für die Felder der Zeilen 0 bis 7 durchzuführen (von hieraus führt ein Zug evtl. nach Zeile 0 oder Zeile 1 und damit in den nicht-periodischen Teil) und dann für die Zeilen 8 bis 16 (von hieraus führen Züge nur in den periodischen Teil der Färbung).

Dieser Nachweis kann leicht (auch wenn es Konzentration und etwas Zeit erfordert) anhand der Figur für die Zeilen 0 bis 16 durchgeführt werden. Hierzu sieht man sich zeilenweise zu den Feldern $(n|a)$ die zugehörigen vier Felder der Diagonalen $(n-i|i)$ mit $i \in (\{1, 2, \dots, 6\} \setminus \{a, 7-a\})$ an und überprüft ob mindestens ein bzw. kein rotes Feld darunter vorkommt. In der Figur erkennt man z.B., dass man für $n = 12$ aus den roten Feldern $(12|3)$ und $(12|4)$ nur auf die grünen Felder $(11|1)$, $(10|2)$, $(7|5)$, $(6|6)$ ziehen kann, aber aus den grünen Feldern $(12|1)$, $(12|2)$, $(12|5)$, $(12|6)$ auf die roten Felder $(9|3)$ oder $(8|4)$.

Bemerkung: Der Beweis benützt damit in versteckter Weise eine vollständige Induktion.

Zur Erzeugung der Tabelle mit Computerprogramm (z.B. Excel): Das Programm soll Gewinnzellen (so heißen die Felder bei Excel) die Zahl 1 zuordnen und Verlustfeldern 0. Wir ergänzen die Tabelle um die Zeilen -1 bis -6 . Wer in eines dieser Felder unter der Missachtung der Regel $n-i \geq 0$ zieht, hat nicht regelgerecht gezogen, also verloren, also hat der Spieler, der danach am Zug ist (bzw. wäre), gewonnen. Also sind diese Zellen Gewinnzellen und wir tragen von Hand die Zahl 1 ein. Ersatzweise kann man auch in den Zeilen 0 bis 5 die Gewinn- und Verlustfelder durch Einzelfallbetrachtung bestimmen.

Eine Zelle $(n|a)$ ist Gewinnzelle, wenn für sie die Bedingung (A) erfüllt ist, d.h. wenn in den Zellen, die Zielzellen von regelgerechten Zügen sind, mindestens eine Verlustzelle vorkommt, d.h. wenn mindestens einmal der Wert Null vorkommt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Produkt aus diesen Zahlen den Wert 0 hat. Die Zelle $(n|a)$ ist Verlustzelle, wenn für sie die Bedingung (B) erfüllt ist, d.h. wenn in diesen Zellen nie der Wert Null vorkommt, dies ist genau dann der Fall, wenn das Produkt dieser Zahlen den Wert 1 hat. Nun leistet die Formel $=1 - (n-w|w)*(n-x|x)*(n-y|y)*(n-z|z)$, wobei w, x, y, z für die vier Werte aus $\{1, 2, \dots, 6\} \setminus \{a, 7-a\}$ steht, das Gewünschte. Sie ist für die Zellen der Zeile 0 (ersatzweise Zeile 6) schnell von Hand eingetragen und dann in die Zeilen unterhalb kopiert. Nun stellen wir noch sicher, dass Excel die Werte in den Zellen von oben nach unten berechnet und färben Zellen mit Wert 1 grün, die mit Wert 0 rot.

Diese Vorgehensweise ist von den Teilnahmebedingungen gedeckt, da der Computer "zur Ideenfindung und Rechnungskontrolle" benutzt wurde, die Richtigkeit aber ohne dieses Hilfsmittel nachgewiesen werden konnte.



Aufgabe 3: Im spitzwinkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} < \overline{BC}$ seien m_a und m_b die Mittelsenkrechten auf den Seiten BC bzw. AC , ferner M_c der Mittelpunkt der Seite AB . Die Seitenhalbierende CM_c schneide m_a im Punkt S_a und m_b im Punkt S_b ; die Geraden AS_b und BS_a schneiden sich im Punkt K .

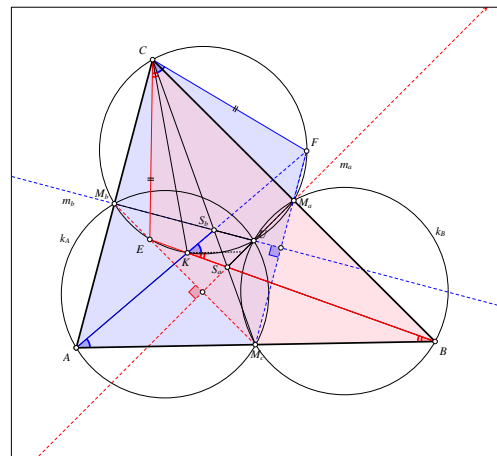
Beweise: $\angle ACM_c = \angle KCB$.

Lagebetrachtung: Bekanntlich teilt die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. Aus $\overline{AC} < \overline{BC}$ folgt dann, dass die Winkelhalbierende von C das Innere der Strecke AM_c trifft. Insbesondere ist $\varphi := \angle ACM_c > \angle M_cCB = \gamma - \varphi$. Nun ist $\gamma - \varphi < \varphi < \gamma < 90^\circ$, also gilt

$$CS_b = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} < \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\cos(\gamma - \varphi)} = CS_a,$$

damit liegt K im Innern des Teildreiecks AM_cC zwischen A und S_b , ferner liegt S_a zwischen B und K . Weil das Dreieck ABC spitzwinklig ist, schneiden sich die Mittelsenkrechten m_a und m_b im Innern des Dreiecks ABC ; und weil $\overline{AC} < \overline{BC}$, sogar im Innern des Teildreiecks M_cBC . Damit ist $U \neq M_c$, d.h. es ist auch $S_a \neq S_b$, sodass K eindeutig definiert ist.

1. Beweis: Mit U bezeichnen wir den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC , mit E und F die Bilder von M_c bei Spiegelung an m_a bzw. m_b . Schließlich seien k_A, k_B, k_C die Kreise mit Durchmesser AU bzw. BU bzw. CU .



Wir stellen fest, dass die drei Kreise k_A, k_B, k_C kongruent sind, weil sie alle den gleichen Durchmesser haben, nämlich den Umkreisradius des Dreiecks ABC . Weil U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist, folgt zusammen mit dem Satz von Thales, dass je zwei dieser Kreise eine der Mittelsenkrechten als gemeinsame Sehne und damit als Symmetrieachse haben. Also ist der Kreis k_C sowohl Bild von k_A bei Spiegelung an m_b als auch Bild von k_B bei Spiegelung an m_a . Weil nun M_c sowohl auf k_B als auch auf k_A liegt, enthält k_C nicht nur die Punkte C, U, M_a und M_b , sondern auch noch E und F , nämlich als Bilder von M_c bei Spiegelung an m_a bzw. m_b . Wir werden zeigen, dass auch K auf k_C liegt:

Es gilt sowohl $M_cE \perp m_a$ als auch $M_cM_b \perp m_a$, also sind M_c, E , und M_b kollinear, analog auch F, M_a und M_c . Weiter sind auch A, K, S_b und F kollinear, weil das Punktetripel (A, S_b, F) das Bild des kollinearen Punktetripels (C, S_b, M_c) bei Spiegelung an m_b ist und K auf der Geraden AS_b liegt. Analog begründen wir, dass B, S_a, K und E kollinear sind.

Damit sind die Vierecke CEM_cB und AM_cFC bzgl. m_a bzw. m_b achsensymmetrische Trapeze, hieraus folgern wir $\angle ECM_c = \angle EBM_c = \angle KBA$ und $\angle M_cCF = \angle M_cAF = \angle BAK$. Weil die Gerade CM_c durch das Winkelzentrum von $\angle ECF$ verläuft, ergibt sich zusammen mit dem Außenwinkelsatz im Dreieck ABK

$$\angle ECF = \angle ECM_c + \angle M_cCF = \angle KBA + \angle BAK = 180^\circ - \angle AKB = \angle BKF.$$

Falls K zwischen E und S_a liegt (wie in der Figur), liegen E und C in der gleichen Halbebene bzgl. der Geraden KF und es gilt $\angle ECF = \angle BKF = 180^\circ - \angle FKE$, und falls E zwischen K und S_a liegt, liegen E und C in verschiedenen Halbebenen bzgl. der Geraden KF und es gilt $\angle ECF = \angle BKF = \angle EKF$; in beiden Fällen ist das Viereck $EKFC$ nach Umfangswinkelsatz ein Sehnenviereck. Da k_C der Umkreis von Dreieck EFC ist, liegt K ebenfalls auf k_C ; im Grenzfall $E = K$ folgt dies nach Sehnentangentensatz. Je nach Lage von F bzgl. der Strecke M_aM_c folgt nun mit ähnlicher Argumentation wie gewünscht

$$\angle ACM_c = \angle AFM_c = \angle KFM_c = \angle KFM_a = \angle KCM_a = \angle KCB$$

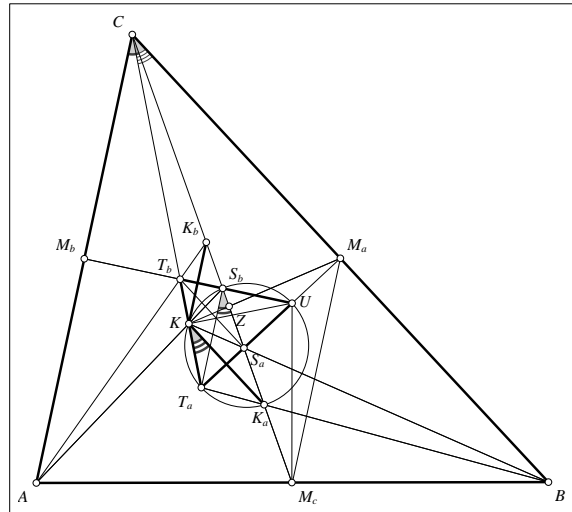
bzw. $\angle ACM_c = \angle AFM_c = \angle KFM_c = 180^\circ - \angle M_aFK = \angle KCM_a = \angle KCB$.



2. Beweis (Strahlensatz): Wir stellen zunächst fest, dass die Gerade CM_c das Bild der Geraden BS_a bei Spiegelung an m_a ist und auch das Bild der Geraden AS_b bei Spiegelung an m_b .

Wir spiegeln K an m_a und m_b und erhalten so K_a bzw. K_b . Da K auf der Geraden BS_a liegt, liegt K_a auf dem Spiegelbild von BS_a bzgl. der Spiegelung an m_a , also auf CM_c ; und analog liegt auch K_b auf CM_c . Nun haben KK_a und BC das gemeinsame Lot m_a , es gilt also $KK_a \parallel BC \parallel M_bM_c$, analog gilt $KK_b \parallel AC \parallel M_aM_c$.

Die Punkte C, K_b, S_b, S_a und K_a liegen in dieser Reihenfolge auf CM_c (vgl. vorausgeschickte Lagebetrachtung)



Seien T_a und T_b die Schnittpunkte von m_a bzw. m_b mit der Geraden CK , d.h. C, T_b, K und T_a liegen in dieser Reihenfolge auf der Geraden CK . Die Spiegelung an m_a führt T_a auf sich selbst und BK nach CK , d.h. die Punkte B, K_a und T_a sind kollinear. Analog sind die Punkte A, K_b und T_b kollinear.

Schließlich sei Z der Schnittpunkt von KM_a mit CM_c .

Die vorliegenden Parallelitäten, Kollinearitäten und Lagebeziehungen ermöglichen uns, in der Figur die Punkte Z, S_a, S_b, T_a und T_b als Zentren von zentrischen Streckungen zu deuten, die die Strecken KK_a und KK_b abbilden. Die Streckfaktoren können wir dabei unter Berücksichtigung der Lagebeziehungen (vgl. Eingangsbemerkung) mit $\lambda := |ZM_a| : |ZK|$ ausdrücken. Im Detail:

- i) $(Z, -\lambda)$ bildet KK_a auf M_aC ab, und KK_b auf M_aM_c .
- ii) $(S_a, -2\lambda)$ bildet KK_a auf BC ab. (Der Streckfaktor ist hier doppelt so groß wie bei $(Z, -\lambda)$, da das Bild von KK_a hier doppelte Länge hat; dies gilt im Folgenden analog.
- iii) $(T_a, 2\lambda)$ bildet KK_a auf BC ab.
- iv) $(S_b, 2\lambda)$: bildet KK_b auf AC ab.
- v) $(T_b, -2\lambda)$: bildet KK_b auf CA ab.

Nun können wir Längenverhältnisse ablesen und mit Strahlensatz folgern:

$$\text{mit Zentren } S_a \text{ und } T_b: \frac{\overline{K_aC}}{\overline{S_aC}} = \frac{\overline{S_aC} - \overline{S_aK_a}}{\overline{S_aC}} = \frac{2\lambda - 1}{2\lambda} = \frac{\overline{T_bC} - \overline{T_bK}}{\overline{T_bC}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{T_bC}} \Rightarrow S_aT_b \parallel K_aK \perp m_a;$$

$$\text{mit Zentren } S_b \text{ und } T_a: \frac{\overline{K_bC}}{\overline{S_bC}} = \frac{\overline{S_bC} + \overline{S_bK_b}}{\overline{S_bC}} = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda} = \frac{\overline{T_aC} + \overline{T_aK}}{\overline{T_aC}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{T_aC}} \Rightarrow S_bT_a \parallel K_bK \perp m_b.$$

Mit Stufen- und Wechselwinkelsatz folgt zusammen mit der Symmetrie bez. m_a bzw. m_b :

$$\begin{aligned} \angle S_bS_aT_b &= \angle S_bCB = \angle CBS_a = \angle T_bS_aK, \text{ also halbiert } S_aT_b \text{ den Winkel } \angle S_bS_aK, \\ \angle KS_bT_a &= \angle S_bAC = \angle ACS_b = \angle T_aS_bS_a; \text{ also halbiert } S_bT_a \text{ den Winkel } \angle KS_bS_a. \end{aligned}$$

Die Mittelsenkrechten m_a und m_b schneiden sich im Umkreismittelpunkt U und stehen senkrecht auf S_aT_b bzw. S_bT_a , diese beiden Strecken sind also Höhen im Dreieck UT_bT_a . Bekanntlich sind die Höhen in einem Dreieck (hier UT_bT_a) die Winkelhalbierenden im Höhenfußpunktdreieck (zwei dieser Höhenfußpunkte sind S_a und S_b). Damit folgt, dass die Strecken S_aK und S_bK zwei Seiten dieses Höhenfußpunktdreiecks sind und K der dritte Höhenfußpunkt sein muss, also ist UK die dritte Höhe.

Damit enthält der Halbkreis über der Strecke UT_a die Punkte K und S_b , und wegen Symmetrie bez. m_a auch den Punkt K_a . Über der Sehne T_aK_a ist dann nach Umfangswinkelsatz $\angle T_aS_bK_a = \angle T_aKK_a$. Nun folgt zusammen mit Stufenwinkelsatz an parallelen Geraden wie gefordert

$$\angle ACM_c = \angle T_aS_bK_a = \angle T_aKK_a = \angle T_aCB = \angle KCB.$$



Variante (Satz von Menelaos, gleiche Skizze, die Punkte K_b und Z werden nicht benötigt; etwas knapp formuliert): Die Gerade CM_c schneidet die Seiten von Dreieck ABK (bzw. deren Verlängerungen) in den Punkten M_c , S_a und S_b . Nach Satz des Menelaos gilt dann

$$\frac{\overline{AS_b}}{\overline{S_bK}} \cdot \frac{\overline{KS_a}}{\overline{S_aB}} \cdot \frac{\overline{BM_c}}{\overline{M_cA}} = 1.$$

Nach Voraussetzung gilt $\overline{BM_c} = \overline{M_cA}$, $\overline{AS_b} = \overline{CS_b}$ und

$$\overline{BS_a} = \overline{CS_a}, \text{ also folgt } \frac{\overline{CS_b}}{\overline{CS_a}} = \frac{\overline{KS_b}}{\overline{KS_a}}.$$

Im Dreieck S_aKS_b schneide die Winkelhalbierenden von K die Seite S_aS_b im Punkt W , nach bekanntem

$$\text{Satz gilt } \frac{\overline{CS_b}}{\overline{CS_a}} = \frac{\overline{KS_b}}{\overline{KS_a}} = \frac{\overline{S_bW}}{\overline{WS_a}}.$$

Nach Satz von Apollonius liegt nun der Punkt K auf dem Halbkreis über der Strecke CW . Also steht die Gerade CK senkrecht auf der Winkelhalbierenden im Dreieck S_aKS_b bei K und halbiert somit den zugehörigen Außenwinkel.

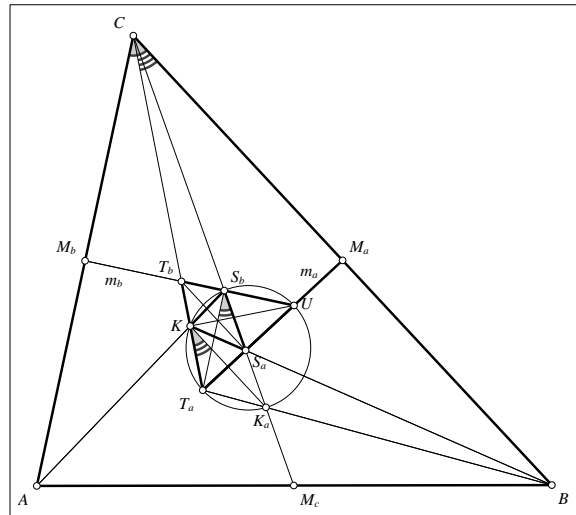
Die Geraden BS_a und CS_a liegen symmetrisch bez. m_a , also ist m_a auch Winkelhalbierende des Außenwinkels von Dreieck S_aKS_b an der Ecke S_a . Analog ist m_b Winkelhalbierende des Außenwinkels bei S_b .

Seien nun T_b und T_b die Schnittpunkte von m_a und m_b mit CK und K_a das Bild von K bei Spiegelung an m_a . Dann sind die Eckpunkte des Dreiecks T_aT_bU die Schnittpunkte der Außenwinkelhalbierenden von Dreieck KS_aS_b . Nach bekanntem Satz (oder schneller Winkeljagd) sind dann die Ecken des Dreiecks KS_aS_b die Höhenfußpunkte im Dreieck T_aT_bU .

Damit enthält der Thaleskreis über der Strecke UT_a die Punkte K und S_b , und wegen Symmetrie bez. m_a auch den Punkt K_a . Über der Sehne T_aK_a ist dann nach Umfangswinkelsatz $\angle T_aS_bK_a = \angle T_aKK_a$. Nun folgt zusammen mit Stufenwinkelsatz an parallelen Geraden – man beachte, dass $KK_a \perp m_a$, also $KK_a \parallel AB$ und $T_aS_b \perp m_a$, also $T_aS_b \parallel AC$ – wie gewünscht

$$\angle ACM_c = \angle T_aS_bK_a = \angle T_aKK_a = \angle T_aCB = \angle KCB.$$

Bemerkung: Es gilt also $\angle UM_bC = \angle UKC = \angle UM_aC = 90^\circ$. Also liegen die Punkte C , M_b , K , U und M_a alle auf dem Thaleskreis über CU .





3. Beweis: Die Seitenhalbierende $s_c = CM_c$ teilt den Winkel γ in die Winkel $\varphi := \angle ACM_c$ und $\angle M_cCB = \gamma - \varphi$ auf. Die Dreiecke AS_bC und CS_aB sind symmetrisch bzgl. m_b bzw. m_a , also gleichschenkelig mit Basiswinkel φ bzw. $\gamma - \varphi$, damit folgt

$$\angle BAK = \alpha - \varphi \text{ und } \angle KBA = \beta - \gamma + \varphi,$$

also $\angle AKB = 180^\circ - (\alpha - \varphi) - (\beta - \gamma + \varphi) = 2\gamma$.

Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt sein Umkreismittelpunkt U im Innern des Dreiecks und es gilt $\angle AUB = 2\angle AUM_c = 2\gamma < 180^\circ$.

Nach Umfangswinkelsatz liegen also U und K auf dem gleichen Kreisbogen über der Sehne AB . Der zugehörige Kreis Γ ist symmetrisch bzgl. m_c , also gibt es einen Punkt T auf m_c sodass UT Durchmesser von Γ ist; dabei liegen U und T in verschiedenen Halbebenen bzgl. AB . Nun ist $ATBK$ Sehnenviereck, also $\angle BTA = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - 2\gamma$, und das Dreieck ATB ist gleichschenkelig mit Basis AB , hat also den Basiswinkel $\angle ABT = \angle AUT = \gamma = \angle TAB$.

Nun wählen wir auf dem Strahl $[CA$ den Punkt X so, dass das Dreieck XTA gleichschenkelig mit Basis AX ist; es hat dann die Basiswinkel β . Analog wählen wir auf $[CB$ den Punkt Y so, dass das Dreieck BTY gleichschenkelig mit Basis BY ist, es hat dann den Basiswinkel α . Nun sind die Strecken XT, AT, BT und YT alle gleich lang und es gilt

$$\angle YTX = (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\gamma) + (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ;$$

d.h. T ist der Mittelpunkt der Strecke XY .

Somit haben die Dreiecke ABC und YXC die gleichen Innenwinkel, sind also ähnlich; und da M_c und T die Mittelpunkte von AB bzw. YX sind, sind auch die Teildreiecke ACM_c und YCT ähnlich, insbesondere ist $\angle ACM_c = \angle TCY$.

Somit genügt es noch zu zeigen, dass K auf der Geraden TC liegt. Dies ist der Fall, wenn $\angle BTC = \angle BTK$. Tatsächlich ergibt sich über die Winkelsumme im Dreieck TBC

$$\angle BTC = 180^\circ - (\beta + \gamma) - \angle TCB = \alpha - \angle ACM_c = \alpha - \varphi,$$

und im Kreis Γ erhält man mit Umfangswinkelsatz über der Sehne BK das gleiche Ergebnis für

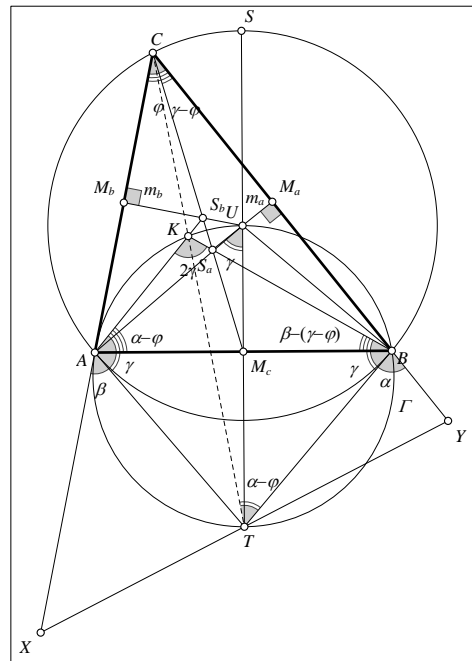
$$\angle BTK = \angle BAK = \alpha - \varphi.$$

Die Gerade KT ist Winkelhalbierende im Dreieck ABK ; dies folgt mit dem Südpolsatz; damit sind die Dreiecke AKC und CKB ähnlich. Weiter ist $UK \perp CK$, weil K auf dem Thaleskreis über UT liegt. Damit liegen die Punkte M_b, U, K, M_a und C auf dem Thaleskreis über UC .

Bemerkung: Die Gerade CK ist das Bild der Seitenhalbierenden s_c bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden w_γ , also der *Symmediane von der Ecke C*. Unter diesem Stichwort findet man in einschlägigen Werken Beweisideen. So findet man z.B. bei Honsberger (vgl. Literaturhinweise am Ende) folgenden durchaus bekannten Satz:

HS: Die beiden Tangenten an den Umkreis eines Dreiecks ABC mit in den Ecken A und B schneiden sich – falls $\gamma \neq 90^\circ$ – in einem Punkt, der auf der Symmedianen durch die Ecke C liegt. Falls $\gamma = 90^\circ$, sind diese beiden Tangenten parallel, dann ist die Symmediane das Lot von C auf AB .

Die Ideen aus Honsbergers Beweis zu diesem Satz sind Grundlage für den diesen Beweis.





4. Beweis (*sin*-Satz): Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen im Dreieck ABC .

Die Seitenhalbierende CM_c teilt den Winkel $\angle ACB$ in die beiden Winkel $\angle ACM_c$ und $\angle M_cCB$ auf. Da die Dreiecke AS_bC und CS_aB gleichschenkelig sind, können wir setzen

$$\varphi := \angle ACM_c = \angle S_bAC; \quad \angle M_cCB = \angle CBS_a = \gamma - \varphi.$$

Außerdem sei $\varepsilon := \angle CKA$ und $\varepsilon^* := \angle BKC$.

Mit *sin*-Satz in diesen Dreiecken folgt zusammen mit der Tatsache, dass M_c Mittelpunkt von AB ist,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{\overline{M_c C}}{\overline{AM_c}} = \frac{\overline{M_c C}}{\overline{BM_c}} = \frac{\sin \beta}{\sin(\gamma - \varphi)};$$

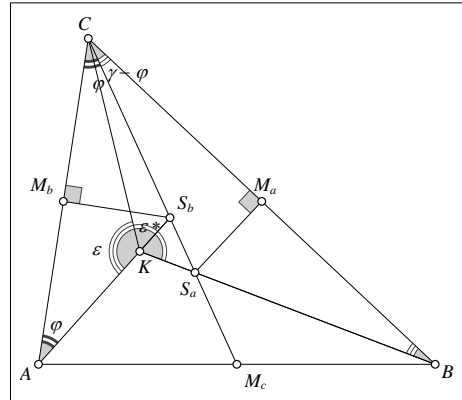
dies formen wir äquivalent um zu
$$\frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \quad (*).$$

Mit *sin*-Satz in den Dreiecken AKC und CKB folgt
$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} = \frac{b}{CK} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{CK} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin(\varepsilon^*)}{\sin(\gamma - \varphi)};$$

was wir zusammen mit (*) umformen zu
$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon^*)} \cdot \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{b}{a} = \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \varphi}. \quad (**).$$

Hieraus folgt $\frac{\sin \varepsilon}{\sin(\varepsilon^*)} = 1$, und weil $360^\circ > \varepsilon + \varepsilon^* > 180^\circ$, also $\varepsilon^* \neq 180^\circ - \varepsilon$, folgt $\varepsilon = \varepsilon^*$.

Nun sind wir fast am Ziel: Im Dreieck ABK gilt $360^\circ - 2\varepsilon = \angle AKB = 180^\circ - (\alpha - \varphi) - (\beta - (\gamma - \varphi)) = 180^\circ - (\alpha + \beta) + \gamma = 2\gamma$, also $\varepsilon = 180^\circ - \gamma$. Mit Winkelsumme im Dreieck BCK folgern wir schließlich, dass $\angle KCB = 180^\circ - \varepsilon - (\gamma - \varphi) = 180^\circ - (180^\circ - \gamma) - \gamma + \varphi = \varphi$, das war zu zeigen.



Weitere Bemerkungen und Literaturhinweise zu Aufgaber 3:

R. Honsberger, "Episodes in Ninteeth and Twentieth Century Euclidean Geometry", 1995, ISBN 0-88385-639-5, p. 60-61

Der Punkt K ist identisch mit dem Punkt Q aus der Aufgabe *bwm 2020 ii 3*.

Die Aufgabe 2008 USAMO Problems/Problem 2 hatte in der Voraussetzung die gleiche Konstruktion des Punktes K vorgegeben; es war zu zeigen, dass die Punkte M_b, K, M_a und C auf einem Kreis liegen.

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2008_USAMO_Problems/Problem_2

"Midpoint of Symmedian Chord" von Srijon Sarkar vom Juni 2021 definiert K als Mittelpunkt der Sehne, die der Umkreis des Dreiecks aus der Symmediane ausschneidet (dies folgt sofort aus $UK \perp CK$). Er zeigt dabei mehrere Möglichkeiten auf, wie dieser Punkt noch charakterisiert werden kann. Dort können weitere Ansätze für Beweise gefunden werden, z.B. ist K der von H_c (= Höhenfußpunkt auf Seite c) verschiedene Schnittpunkt der Kreise AH_cM_b und BH_cM_a .

https://srijonsarkar.files.wordpress.com/2021/07/midpoint-of-symmedian-chord_srijon-sarkar.pdf

"Lets talk about symmedians" von S. Luo und C. Pohoata (2013)

https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets_talk_about_symmedians.pdf

"A special Point on the Median" von A. Mudgal und G. Handa (2017)

https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2017-02/article_1_a_special_point_on_the_median.pdf

"On two special Points in Triangle!" von K. Pause (2018). Dort tauft der Autor den Punkt K als *Dumpty-Point* (von C); den dazu isogonal liegenden Punkt und K sind dann die *C-Humpty-Dumpty-Punkte*.

https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.files.wordpress.com/2018/05/two_special_points__1_.pdf

<https://artofproblemsolving.com/community/c6h1588724p9838854>

<https://math.stackexchange.com/questions/3894623/what-are-the-humpty-and-dumpty-points>



Aufgabe 4: In der Ebene seien einige Punkte rot und einige blau gefärbt. Der Abstand zwischen zwei verschieden gefärbten Punkten ist immer höchstens 1.

Beweis: Es gibt einen Kreis mit Durchmesser $\sqrt{2}$ derart, dass außerhalb dieses Kreises keine zwei verschieden gefärbte Punkte liegen.

Es genügt, dies für den Fall zu zeigen, dass endlich viele Punkte gefärbt wurden.

Bezeichnungen: Die rot gefärbten Punkte seien mit R_1, R_2, \dots, R_n , bezeichnet, die blau gefärbten Punkte mit B_1, B_2, \dots, B_m , der Abstand der Punkte X und Y mit $d(X, Y)$, der Kreis mit Mittelpunkt X und Radius r mit $k(X, r)$. Um Missverständnisse zu vermeiden, verwenden wir den Begriff *Kreisscheibe* eines Kreises für die Menge der Punkte, die im Innern des Kreises oder auf seiner Randlinie liegen.

Eine Kreisscheibe heiße *roter* (bzw. *blauer*) *U-Kreis* (*U* wie Umschließung), wenn sein Durchmesser nicht größer ist als $\sqrt{2}$ und alle roten (bzw. blauen) Punkte auf der zugehörigen Kreisscheibe liegen. Ein konzentrisch dazu liegender Kreis mit Durchmesser $\sqrt{2}$ ist dann ein Kreis, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, es genügt also, die Existenz eines roten oder blauen *U-Kreises* nachzuweisen.

1. Beweis: Wir benützen folgende Hilfssätze, die wir am Ende beweisen:

HS 1: Besitzen zwei verschiedene Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten K_1 bzw. K_2 eine gemeinsame Sehne PQ , und hat diese Sehne mit der Strecke K_1K_2 einen gemeinsamen Punkt, so ist die Schnittmenge ihrer Kreisscheiben in der Kreisscheibe mit Durchmesser PQ enthalten. Insbesondere trifft dies für zwei Kreise mit gleichem Radius zu.

(Die Voraussetzung kann auch folgendermaßen formuliert werden: "... und liegen K_1 und K_2 nicht in der gleichen offenen Halbebene bzgl. der Sehne PQ ...")

HS 2: Zu jeder endlichen Menge M von mindestens zwei Punkten gibt es genau einen *Pferchkreis*, d.h. eine Kreisscheibe k , die alle diese Punkte enthält und gleichzeitig unter allen Kreisscheiben mit dieser Eigenschaft den kleinsten Radius hat. Dabei ist eine Kreisscheibe genau dann *Pferchkreis* zu der Punktmenge M , wenn mindestens eine der beiden Eigenschaften erfüllt ist:

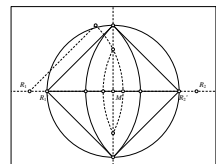
- (A) Auf dem Rand von k gibt es zwei Punkte aus M , die Endpunkte eines Durchmessers von k sind.
- (B) Auf dem Rand von k gibt es drei Punkte aus M , die Eckpunkte eines spitzwinkligen Dreiecks sind.

Nun zum eigentlichen Beweis, wir treffen mehrere Fallunterscheidungen:

Fall 1: Von einer Farbe ist genau ein Punkt F gefärbt oder kein Punkt gefärbt: Dann ist $k(F; \frac{\sqrt{2}}{2})$ ein *U-Kreis* bzw. jeder Kreis mit Durchmesser $\sqrt{2}$ ein *U-Kreis*.

Fall 2: Nicht Fall 1, d.h. mindestens zwei Punkte $R_1 \neq R_2$ sind rot gefärbt und mindestens zwei Punkte $B_1 \neq B_2$ sind blau gefärbt.

Nach Voraussetzung liegen nun alle blauen Punkte in der Schnittmenge der kongruenten, aber nicht identischen Kreisscheiben $k(R_1; 1)$ und $k(R_2; 1)$. Da es mindestens zwei blaue Punkte gibt, ist die Schnittmenge nicht leer. Also schneiden sich $k(R_1; 1)$ und $k(R_2; 1)$ in zwei (i.A. ungefärbten Punkten) P und Q , haben somit die gemeinsame Sehne PQ . Diese ist gleichzeitig Symmetrieachse für die Gesamtfigur, schneidet also die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte R_1 und R_2 . Nach HS 1 ist also die Schnittmenge von $k(R_1; 1)$ und $k(R_2; 1)$ in der Kreisscheibe mit Durchmesser PQ enthalten. Mit $d = d(R_1, R_2)$ und $s := d(P, Q)$ gilt $(\frac{d}{2})^2 + (\frac{s}{2})^2 = 1$; es ist also $s^2 = 4 - d^2$ (*).



Fall 2.1: Es gibt zwei Punkte $R_1 \neq R_2$ mit $d(R_1, R_2) > \sqrt{2}$. Mit (*) folgt $s^2 < 4 - 2 = 2$, also $s < \sqrt{2}$, also ist nach HS 1 die Kreisscheibe mit Durchmesser PQ ein *blauer U-Kreis*. Entsprechendes gilt, wenn wir in der Argumentation die Farben blau und rot vertauschen.



Fall 2.2: Nicht Fall 2.1, d.h. zwei gleichfarbige Punkte haben stets höchstens den Abstand $\sqrt{2}$.

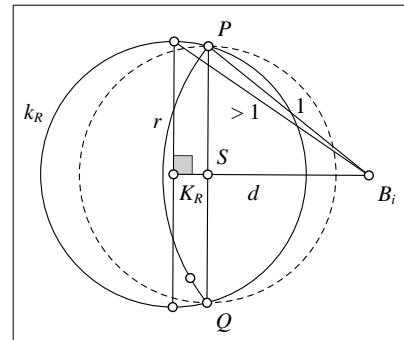
Nach HS 2 gibt es einen eindeutig bestimmten Pferchkreis der roten Punkte, sein Mittelpunkt sei K_R , sein Radius r . Analog sei k_B mit Mittelpunkt K_B und Radius b der blaue Pferchkreis, o.B.d.A. gelte $b \geq r$.

Fall 2.2.1: $r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dann erfüllt k_R die Bedingung der Aufgabe.

Fall 2.2.2: Nicht Fall 2.2.1, d.h. $b \geq r > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dies kann nicht eintreten, wie wir in zwei Schritten zeigen:

In einem ersten Schritt folgern wir aus der Annahme $b \geq r > \frac{\sqrt{2}}{2}$, dass alle blauen Punkt B_i auf der Kreisscheibe des Pferchkreises k_R liegen, aber nicht auf ihrem Rand. (**). Wäre nämlich B_i ein blauer Punkt, der nicht im Innern von k_R liegt, dann ist $d = d(B_i, K_R) > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Die gemeinsame Sehne PQ der Kreise $k(B_i; 1)$ und k_R – der Durchschnitt dieser beiden Kreise enthält alle roten Punkte – steht senkrecht auf der Geraden $K_R B_i$, der Schnittpunkt von $K_R B_i$ und PQ sei S . Weil nun

$$d^2 + r^2 > d^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 > 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1^2,$$



ist $d(K_R, B_i) > d(B_i, S)$, d.h. die Sehne PQ schneidet die Strecke $K_R B_i$ im Innern, also ist PQ kürzer als der Durchmesser von k_R . Nach HS 1 enthält nun der Kreis mit Durchmesser PQ alle roten Punkte, hat aber einen kleineren Radius als k_R , im Widerspruch zur Minimalität von k_R .

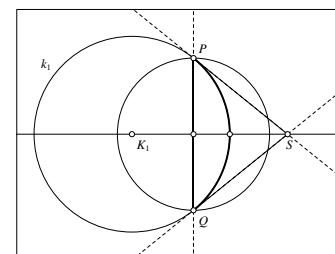
Im zweiten Schritt führen wir (**) zum Widerspruch: Wenn alle blauen Punkte im Innern der Kreisscheibe k_R liegen, gilt $b \leq r$, aber nach Annahme auch $b \geq r > \frac{\sqrt{2}}{2}$, damit gilt $b = r$. Damit sind aber auch k_R und k_B identisch, denn wenn sie verschiedene Mittelpunkte hätten, wäre der Kreis über der gemeinsamen Sehne als Durchmesser ein Pferchkreis der blauen Punkte mit kleinerem Radius. Also liegen nach HS 2 mindestens zwei blaue Punkte auf dem Rand von $k_B = k_R$, im Widerspruch zu (**).

Schließlich noch die beiden ausstehenden Beweise:

HS 1: Besitzen zwei verschiedene Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten K_1 bzw. K_2 eine gemeinsame Sehne PQ , und hat diese Sehne mit der Strecke $K_1 K_2$ einen gemeinsamen Punkt, so ist die Schnittmenge ihrer Kreisscheiben in der Kreisscheibe mit Durchmesser PQ enthalten. Insbesondere trifft dies für zwei Kreise mit gleichem Radius zu.

(Die Voraussetzung kann auch folgendermaßen formuliert werden: "... und liegen K_1 und K_2 nicht in der gleichen offenen Halbebenen bzgl. der Sehne PQ ...")

Beweis zu HS 1: Sei k_T der Kreis mit Durchmesser PQ . Falls K_1 (oder K_2 , analog) der Mittelpunkt der Sehne PQ ist, so sind k_1 und k_T identisch, also enthält k_T den Kreis k_1 vollständig, insbesondere auch die Schnittmenge von k_1 und k_2 .



Falls weder K_1 noch K_2 Mittelpunkt von PQ ist, betrachten wir die beiden offenen Halbebenen bzgl. PQ . Nach Voraussetzung liegen die Mittelpunkte K_1 und K_2 nicht in der gleichen Halbebene. Diejenige die K_1 enthält, sei E_1 , diejenige, die K_2 enthält, sei E_2 . Die beiden Tangenten an k_1 in P und Q verlaufen außerhalb von k_1 und ihr Schnittpunkt liegt in E_2 .

Die Tangenten in P und Q an k_T stehen senkrecht auf PQ , verlaufen also im Bereich von E_2 sicher außerhalb von k_1 . Damit verläuft der Kreisbogen von k_T , der in E_2 liegt, außerhalb von k_1 , zusammen mit der Sehne PQ umschließt er also vollständig den Teil von k_1 , der in E_2 liegt. Mit analoger Schlussweise zeigen wir, dass k_T auch vollständig den Teil von k_2 umschließt, der in E_1 liegt, und die Strecke PQ umschließt k_T sowieso. Damit umschließt k_T auch die Schnittmengen der beiden Kreisscheiben k_1 und k_2 .



HS 2: Zu jeder endlichen Menge M von mindestens zwei Punkten gibt es genau einen *Pferchkreis*, d.h. eine Kreisscheibe k mit minimalem Radius, die alle diese Punkte enthält. Dabei ist eine Kreisscheibe genau dann *Pferchkreis* von M , wenn sie alle Punkte von M enthält und mindestens eine der beiden Eigenschaften erfüllt ist:

- (A) Auf dem Rand von k gibt es zwei Punkte aus M , die Endpunkte eines Durchmesser von k sind.
- (B) Auf dem Rand von k gibt es drei Punkte aus M , die Eckpunkte eines spitzwinkligen Dreiecks sind.

Beweis zu HS 2:

Eindeutigkeit: Gäbe es zwei verschiedene *Pferchkreise* für M mit gleichem Radius, dann lägen alle Punkte im Durchschnitt dieser beiden Kreisscheiben, nach HS 1 also auf der Kreisscheibe, die die gemeinsame Sehne als Durchmesser hat. Diese Kreisscheibe hat aber einen kleineren Radius im Widerspruch zu Minimalitätsbedingung der beiden *Pferchkreise*.

Existenz: Wir konstruieren diese kleinste Kreisscheibe $k = k(K,r)$ und zeigen:

- k enthält alle Punkte von M ,
- k erfüllt wenigstens eine der Eigenschaften (A) oder (B),
- k ist die kleinste Kreisscheibe mit dieser Eigenschaft.

Da es in M nur endlich viele Punkte gibt, gibt es nur endlich viele Paare von Punkten. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gibt ein Punktepaar M_iM_j derart, dass die Kreisscheibe mit Durchmesser M_iM_j alle Punkte von M enthält. Dann liegen beide Punkte M_i und M_j auf dem Rand dieser Kreisscheibe, d.h. Eigenschaft (A) ist erfüllt und es gibt sicher keine kleinere Kreisscheibe, die wenigstens M_i und M_j enthält. Also ist k der *Pferchkreis* von M .

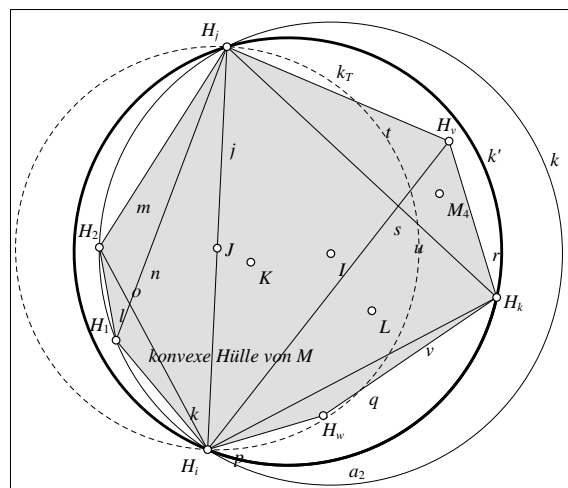
Fall 2: Nicht Fall 1, d.h. zu jedem Paar von Punkten M_iM_j gibt es einen dritten Punkt M_k , der außerhalb des Kreises mit Durchmesser M_iM_j liegt. Insbesondere enthält M mindestens 3 Punkte.

Wir betrachten die konvexe Hülle von M . Sie hat die Form eines konvexen Polygons, das mindestens drei Eckpunkte hat; wir bezeichnen diese Eckpunkte fortlaufend mit H_1, H_2, \dots, H_m . Dabei betrachten wir Punkte von M , die im Innern der Strecke H_iH_{i+1} liegen, nicht als Eckpunkte der konvexen Hülle, d.h. es gilt stets $\angle H_iH_{i+1}H_{i+2} < 180^\circ$ (wie üblich sei $H_{m+s} = H_s$). Die Menge der Dreiecke $H_iH_{i+1}H_k$, deren Umkreisscheiben alle Punkte von M enthalten, ist nicht leer, z.B. enthält nach Umfangswinkelsatz für jedes i die Umkreisscheibe von Dreieck $H_iH_{i+1}H_k$ dann alle Punkte der konvexen Hülle von M , wenn k so gewählt wird, dass $\angle H_{i+1}H_kH_i$ minimal ist. Von allen diesen Umkreisscheiben wählen wir eine minimale aus, da es nur endlich viele solche Dreiecke gibt, gibt es eine solche. Wir zeigen, dass diese Kreisscheibe der gesuchte *Pferchkreis* k ist, indem wir obige drei Eigenschaften nachweisen:

Die Kreisscheibe k enthält alle Punkte von M : Dies ist nach Konstruktion erfüllt.

Auf dem Rand von k liegen mindestens drei Punkte von M , die Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks sind, d.h. die Eigenschaft (B) ist erfüllt:

Wir nehmen an, dass jedes Dreieck, dessen Eckpunkte aus M auf dem Rand von k liegen (es gibt mindestens eines), stumpfwinklig ist. Unter dieser Annahme gibt es unter allen Seiten dieser Dreiecke eine längste, ihre Endpunkte nennen wir H_i und H_j mit $d(H_i, H_j) = s$. Alle Randpunkte von M , die auf dem Rand von k liegen, bilden mit H_iH_j ein stumpfwinkliges Dreieck, d.h. s ist kürzer als der Durchmesser von k , weil andernfalls ein Dreieck rechtwinklig, also nicht stumpfwinklig wäre; und alle liegen auf dem kürzeren Bogen H_iH_j des Randes von k . Nach Fallunterscheidung haben wir ausgeschlossen, dass der Thaleskreis über H_iH_j alle Punkte von M enthält, also gibt es mindestens einen weiteren Punkt M_w , der Menge M , der außerhalb





dieses Thaleskreises liegt. Damit gibt es aber auch sicher mindestens eine weitere Ecke H_i der konvexen Hülle in diesem Gebiet. Gleichzeitig sind aber $\angle H_i H_j H_k < 90^\circ$ und $\angle H_j H_i H_k < 90^\circ$, weil sonst Dreieck $H_i H_j H_k$ rechtwinklig wäre und $H_i H_j$ nicht maximal. Also ist das Dreieck $H_i H_j H_k$ spitzwinklig im Widerspruch zur Annahme.

Es gibt keine kleinere Kreisscheibe mit dieser Eigenschaft:

Nach dem oben Gesagtem genügt es zu zeigen, dass der Umkreis k eines spitzwinkligen Dreiecks $H_i H_j H_k$ die kleinste Kreisscheibe ist, die alle drei Ecken enthält.

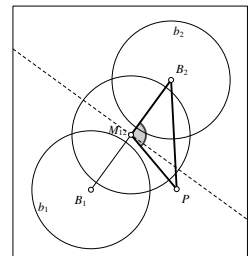
Gäbe es nun eine kleinere Kreisscheibe k' , die alle drei Ecken enthält, dann können diese drei Ecken nicht alle auf deren Rand liegen, da der Umkreis eines Dreiecks eindeutig definiert ist. Dann können wir das Dreieck so lange schieben und drehen, bis die zwei Ecken H_i und H_j – sie mögen die längsten Seite einschließen – auf dem Rand von k' liegen. Nun haben k und k' die gemeinsame Sehne $H_i H_j$. Nun ist $\angle H_i H_k H_j < 90^\circ$, also liegt nach Umfangswinkelsatz der Punkt H_k außerhalb des Thaleskreises über $H_i H_j$, also auf dem längeren Bogen $H_i H_j$ des Umkreises von Dreieck $H_i H_j H_k$. Der Rand der Kreisscheibe k' verläuft aber zwischen diesem Thaleskreis und diesem Bogen, kann also H_k nicht enthalten.

Bemerkung: Die Zahl $\sqrt{2}$ als obere Schranke für den Durchmesser des gesuchten Kreises kann nicht verkleinert werden: Besteht die Menge M aus den Eckpunkten eines Quadrates und färbt man diese abwechselnd blau und rot, so haben k_B und k_R beide den Durchmesser $\sqrt{2}$.

2. Beweis (mit Satz von Helly): Falls von einer Farbe genau ein Punkt F gefärbt ist, dann ist $k(F; \frac{\sqrt{2}}{2})$ ein U -Kreis, und falls von einer Farbe gar kein Punkt gefärbt ist, ist jeder Kreis um einen beliebigen Punkt mit Durchmesser $\sqrt{2}$ ein U -Kreis. Im Folgenden gehen wir daher davon aus, dass von jeder Farbe mindestens zwei Punkte gefärbt sind.

Zu jedem blau gefärbten Punkt B_i sei b_i die abgeschlossene Kreisscheibe mit Durchmesser $\sqrt{2}$, die B_i als Mittelpunkt hat. Wir treffen eine Fallunterscheidung (diese ist so formuliert, dass die Vollständigkeit klar ist!) nach der gegenseitigen Lage der b_i , d.h. nach Entfernung der Mittelpunkte B_i und konstruieren für jeden Fall den Mittelpunkt eines roten oder blauen U -Kreises, dieser kann gefärbt oder ungefärbt sein.

Fall 1: Es gibt zwei Kreisscheiben b_1 und b_2 , die keinen Punkt (gefärbt oder ungefärbt) gemeinsam haben, d.h. es gibt zwei blau gefärbte Punkte $B_1 \neq B_2$ mit $d(B_1 \neq B_2) > \sqrt{2}$. Den Mittelpunkt der Strecke $B_1 B_2$ nennen wir M_{12} , wir zeigen, dass dann $k(M_{12}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ ein roter U -Kreis ist:



Nach Voraussetzung des Falls ist $d(M_{12}, B_1) = d(M_{12}, B_2) > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Für jeden Punkt P außerhalb des Kreises $k(M_{12}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ gilt nun $d(M_{12}, P) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ und von den Winkeln $\angle PM_{12} B_2$ und $\angle PM_{12} B_1$ ist o.B.d.A. $\angle PM_{12} B_2 \geq 90^\circ$, also $\cos(\angle PM_{12} B_2) \leq 0$. Nach \cos -Satz im Dreieck $PM_{12} B_2$ ist dann

$$d(B_2, P)^2 = d(B_2, M_{12})^2 + d(M_{12}, P)^2 - d(B_2, M_{12}) \cdot d(M_{12}, P) \cdot \cos(\angle PM_{12} B_2) > 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

also auch $d(B_i, P) > 1$. Damit kann P nicht rot gefärbt sein, d.h. $k(M_{12}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ ist ein roter U -Kreis.

Fall 2: Nicht Fall 1., d.h., d.h. zwei beliebige Kreisscheiben b_i und b_j haben stets mindestens einen Punkt gemeinsam, d.h. für alle Punkte $B_i \neq B_j$ gilt $d(B_i \neq B_j) \leq \sqrt{2}$. Insbesondere ist jeweils der Mittelpunkt der Strecke $B_i B_j$ in b_i und b_j enthalten.

Fall 2.1: Es gibt nur zwei blau gefärbte Punkte, o.E. seien dies $B_1 \neq B_2$: Sei wieder M_{12} der Mittelpunkt der Strecke $B_1 B_2$. Dann ist $k(M_{12}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ offensichtlich ein blauer U -Kreis.

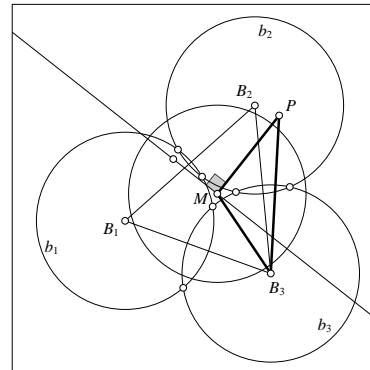
Fall 2.2: Nicht Fall 2.2.1, d.h. es gibt mindestens einen weiteren blau gefärbten Punkt B_3 .



Fall 2.2.1: Es gibt drei Kreisscheiben – o.E. seien dies b_1, b_2 und b_3 –, derart, dass je zwei von ihnen einen gemeinsamen Punkt haben, aber nicht alle drei. Sei M der Umkreismittelpunkt von Dreieck $B_1B_3B_2$. Wir zeigen, dass dann $k(M, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ein roter U -Kreis ist:

Sei wieder M_{12} der Mittelpunkt der Strecke B_1B_2 . Nach Voraussetzung des Falles 2 ist M_{12} in den Kreisscheiben b_1 und b_2 enthalten, nach Voraussetzung von Fall 2.2.1 aber nicht in b_3 . Es gilt also $d(M_{12}, B_1) = d(M_{12}, B_2) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ aber $d(M_{12}, B_3) > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Damit liegt B_3 außerhalb des Thaleskreises über B_1B_2 , damit ist $\angle B_1B_3B_2 < 90^\circ$. Analog gilt dies für die anderen Innenwinkel des Dreiecks $B_1B_3B_2$, damit ist dieses Dreieck spitzwinklig und der Umkreismittelpunkt liegt im Innern.

Sei nun P ein Punkt, der außerhalb von $k(M, \frac{\sqrt{2}}{2})$ liegt und g die Gerade, die durch M geht und senkrecht auf PM steht. Da M im Innern des Dreiecks $B_1B_2B_3$ liegt, teilt g die Ebene in zwei Teilebenen auf derart, dass eine Ecke – o.E. sei dies B_3 – und P in verschiedenen Halbebenen bez. g liegen. Dann ist $\angle PMB_3 > 90^\circ$, und mit Argumentation analog Fall 2.1 ist dann $d(M, B_3) > 1$, also P sicher nicht blau. Damit ist $k(M, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ein roter U -Kreis.



Fall 2.2.2: Keiner der vorigen Fälle, d.h. zu jedem Tripel von verschiedenen blauen Punkten (B_i, B_j, B_k) haben die drei Kreisscheiben b_i, b_j und b_k einen gemeinsamen Punkt. Da die Kreisscheiben alle konvexe Bereiche sind, gibt es nach Satz von Helly einen Punkt M , der in allen Kreisscheiben b_i enthalten ist, also zu allen blauen Punkten B_i eine Entfernung von höchstens $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hat. Damit ist $k(M, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ein blauer U -Kreis.

Satz von Helly: Besitzen von N konvexen Bereichen je drei einen gemeinsamen Punkt N , so gibt es einen Punkt, der in allen N konvexen Bereichen liegt.

Beweis mit vollständiger Induktion nach Anzahl N der Punkte B_i :

Ind'Anf.: Die Aussage ist richtig für $N = 4$: Dann gibt es vier Punkte P_r ($r = 1, 2, 3, 4$), die nach Voraussetzung jeweils im Durchschnitt der Mengen b_i, b_j, b_k ($r \neq i, j, k$) enthalten sind; und da die b_i alle konvex sind, gilt dies auch für alle Punkte, die im evtl. entarteten Dreieck $P_iP_jP_k$ oder auf seinem Rand liegen. Wenn nun diese vier Punkte $P_1P_2P_3P_4$ ein konvexes Viereck bilden, dann ist der Schnittpunkt der Diagonalen in allen möglichen Teildreiecken enthalten, also auch im Durchschnitt aller vier b_i ; falls nicht, liegt einer der vier Punkte P_r im Dreieck der übrigen drei Punkte, also wieder im Durchschnitt aller vier b_i .

Ind'Vor.: Die Aussage sei richtig für ein bestimmtes $N \geq 4$.

Ind.Schl.: Dann ist die Aussage richtig für $N + 1$: Nach Voraussetzung ist der Durchschnitt von je drei der b_i ($i \leq N+1$) nicht leer, nach Ind.Vor. dann auch der Durchschnitt von je vier der b_i , insbesondere der Durchschnitt von b_i, b_j, b_N und b_{N+1} ($i, j < N$). Sei d der Durchschnitt von b_N und b_{N+1} , dann ist auch der Durchschnitt von jedem Tripel (b_i, b_j, d) nicht leer ($i, j < N$). Dies sind N Mengen, nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Punkt P , der in jeder dieser N Mengen ist, insbesondere in d , also sowohl in b_N als auch in b_{N+1} .

Bemerkungen:

Quelle: G. Aumann, "Kreisgeometrie", S. 37 (Satz von Helly) und S. 104 (Pferchkreise), Springer Spektrum, ISBN 978-3-662-45305-6.) Der Begriff "Pferchkreis" scheint nicht allgemein üblich.

Mit einigem topologischen Aufwand kann gezeigt werden, dass der Satz von Helly auch für beliebig viele konvexe Bereiche gilt, wenn diese abgeschlossen sind und mindestens einer davon beschränkt ist. Mit dem 2. Beweis kann also gezeigt werden, dass die Aussage auch dann gilt, wenn unendlich viele Punkte gefärbt sind.