BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2023

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Erstellt: Mai 2023
Verbessert: Juli 2024

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

STIFTERVERBAND

KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Tick, Trick und Track haben jeweils 20, 23 und 25 Tickets für das Karussell auf dem Jahrmarkt in Entenhausen. Sie vereinbaren, dass sie nur alle drei gemeinsam fahren, wofür jeder von ihnen eines seiner Tickets abgeben muss. Außerdem können sie vor einer Fahrt, wenn sie möchten, Tickets nach folgender Regel beliebig oft untereinander umverteilen: Wenn einer eine gerade Anzahl von Tickets besitzt, kann er die Hälfte seiner Tickets an einen beliebigen der anderen beiden abgeben.

Kann es passieren, dass nach irgendeiner Fahrt

a) genau einer kein Ticket hat,
b) genau zwei kein Ticket haben,
c) alle Tickets abgegeben sind?

Anmerkung: Die Richtigkeit der drei Ergebnisse ist zu beweisen.

Antworten: zu a) Ja, zu b) Ja, zu c) Nein.

Beweis: Die Verteilung der Tickets geben wir durch ein Tripel ganzer nicht negativer Zahlen an, so haben z.B. Tick, Trick und Track zu Beginn (20, 23, 25) Tickets.

Zu a) (Angabe eines Beispieles): Ja, z.B. wenn jeder 20 Mal fährt und keiner Tickets an einen anderen abgibt, dann hat Tick kein Ticket mehr, aber Trick noch 3 und Track noch 5.

Zu b) (Angabe eines Beispieles): Ja. z.B. wenn Tick, Trick und Track folgenermaßen vorgehen:

Sie fahren 19 Mal hintereinander, dann haben sie noch (1,4,6) Tickets. Nun gibt Track die Hälfte seiner Tickets an Tick, dann haben sie (4,4,3) Tickets. Anschließend geben Tick und auch Trick jeweils die Hälfte ihrer Tickets an Track, dann haben wir (2,2,7) Tickets. Schließlich fahren sie noch zwei Mal gemeinsam, dann haben sie (0,0,5) Tickets, d.h. genau zwei haben kein Ticket mehr.

Variante 1 (bei der nach jeder Fahrt nur ein Mal Tickets weitergegeben werden): Sie fahren 17 Mal, dann haben sie noch (3,6,8) Tickets. Anschließend gibt Track an Tick 4 Tickets, dann haben sie (7,6,4) Tickets, und nach 4 weiteren Fahrten (3,2,0). Schließlich gibt Trick ein Ticket an Track, sodass sie (3,1,1) Tickets haben. Nach einer weiteren Fahrt haben sie also noch (2,0,0).

Variante 2 (bei der zwei der Enten-Kinder kein Ticket mehr haben und ein Enten-Kind eine ungerade Anzahl, dann endet der Kirmesbesuch zwangsweise; die Schreibweise ist selbsterklärend:

$$(20,23,25) \to^{(19)} (1,4,6) \to^{(\text{Trick})} (3,2,6) \to^{(1)} (2,1,5) \to^{(\text{Tick})} (1,1,6) \to^{(1)} (0,0,5)$$

Zu c): Nein. Beim Weitergeben der Tickets bleibt die Gesamtzahl der Tickets gleich, und sie wird nur bei einer gemeinsamen Fahrt kleiner, und zwar um genau drei. Insgesamt wird die Gesamtzahl der Tickets um ein Vielfaches von drei kleiner. Es ist aber $20 + 23 + 25 = 68 = 3 \cdot 22 + 2$, also können die Kinder sicher nicht mehr als 22 mal fahren und es bleiben immer mindestens zwei Tickets übrig.

Bemerkungen: Die Aufgabenstellung verbietet nicht, dass vor einer Karussellfahrt mehrfach Tickets weitergegeben werden, auch vom gleichen Entenkind (vgl. 1. Beweis). Man kann streiten, ob der Aufgabentext gleichzeitiges Weitergeben von Tickets (also von (19, 22, 24) zu (19, 22 − 11 + 12, 24 − 12 + 11)) erlaubt. Die Aufgabensteller sind der Meinung, dass dies nicht der Fall ist. Wenn Teilnehmende diese Möglichkeit in der Argumentation verwendet hatten, wurde es trotzdem nicht als falsch gewertet.

Die Bedingung "Gesamtzahl Tickets durch drei teilbar" ist nicht hinreichend dafür, dass alle Tickets aufgebraucht werden können, z.B. $(1,1,K)$ mit $K \equiv 7 \mod 12$. Dann ist auch $K \equiv 1 \mod 3$, d.h. die Gesamtzahl der Tickets ist durch 3 teilbar, gleichzeitig ist K ungerade. Da nun jeder eine ungerade Anzahl von Tickets hat, kann am Anfang nicht umverteilt werden, sondern nur gefahren werden. Nach einer Fahrt gibt es $(0,0,K_1)$ Tickets, wobei $K_1 \equiv 6 \mod 12$. Nun wird verteilt und wir haben $(0,K_2, K_2)$ mit $K_2 \equiv 3 \mod 6$. Nun ist K_2 ungerade und es kann somit nicht mehr umverteilt werden, aber auch nicht mehr gefahren werden, weil ein Entenkind keine Tickets mehr hat

Aufgabe 2: Bestimme alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3$$

erfüllen.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Ergebnis: Genau die Zahlentripel (x,y,z), die aus drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen oder deren Permutationen bestehen, erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3$ (*).

1. Beweis (Zurückführen auf die Darstellung der Zahl 6 als Summe von drei Quadratzahlen): Zunächst stellen wir fest, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3 \quad (*)$$

symmetrisch in x, y und z ist, d.h. falls die Zahlen eines Tripels ganzer Zahlen (x,y,z) diese Gleichung erfüllen, dann auch jede Permutation dieses Tripels. Es genügt also Zahlentripel (x,y,z) mit $x \le y \le z$ zu betrachten.

Teil 1: Zahlentripel, die aus drei aufeinander folgenden Zahlen bestehen, erfüllen die Gleichung:

Wir betrachten ein Tripel (x,y,z) ganzer aufeinander folgender Zahlen mit $x \le y \le z$, d.h. es gilt $x = k - 1$, $y = k$, $z = k + 1$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \\ &= (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 - (k-1)k - k(k+1) - (k+1)(k-1) \\ &= k^2 - 2k + 1 + k^2 + k^2 + 2k + 1 - k^2 + k - k^2 - k - k^2 + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Teil 2: Kein anderes Tripel ganzer Zahlen erfüllt die Gleichung:

Sei (x,y,z) ein Tripel ganzer Zahlen, das die Gleichung erfüllt; die Einschränkung, dass $x \le y \le z$, lassen wir zunächst weg. Wir formen die Gleichung äquivalent um:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3 \qquad |\cdot 2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 6 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 6 \qquad (**) \end{aligned}$$

Wenn x,y,z ganze Zahlen sind, dann sind $(x-y)^2$, $(y-z)^2$ und $(z-x)^2$ drei Quadratzahlen, d.h. Zahlen aus der Menge {0, 1, 4, 9, 16, ... }. Ausprobieren im Kopf ergibt sofort, dass die Summe von drei (evtl. gleichen) Quadratzahlen aus dieser Menge nur dann den Wert 6 haben kann, wenn zwei dieser Quadratzahlen den Wert 1 haben und eine den Wert 4.

Weil die Gleichungen (*) und (**) symmetrisch in x,y,z sind, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(z-x)^2 = 4$, also $|z-x| = 2$, und weiter o.B.d.A., dass $z > x$, also $z = k + 1$ und $x = k - 1$ mit $k = {}^1\!/_2(x+z)$; und da x und z entweder beide gerade oder beide ungerade sind, ist k sicher ganzzahlig. Notwendigerweise ist dann $1 = (x-y)^2 = (k-1-y)^2 = (-1+(k-y))^2$ und $1 = (y-z)^2 = (y-k-1)^2 = (-1-(k-y))^2$. Es folgt $|-1+(k-y)| = |-1-(k-y)|$, also $y = k$, d.h. $(x,y,z) = (k-1,k,k+1)$ ist ein Tripel von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen.

Bemerkung: Den Teil 1 kann man weglassen, wenn man Teil 2 folgendermaßen ergänzt:

... Ausprobieren im Kopf ergibt sofort, dass die Summe von drei (evtl. gleichen) Quadratzahlen **genau** dann den Wert 6 hat, wenn zwei dieser Quadratzahlen den Wert 1 haben und die dritte den Wert 4. Weil wir o.B.d.A. $x \le y \le z$ annehmen können, ist (**) **genau dann** erfüllt, wenn $(z-x)^2 = 4$, also $z = x + 2$, $(x-y)^2 = 1$, also $y = x + 1$ und $(y-z)^2 = 1$, also $z = y + 1$ ist. Die Lösungsmenge von (**) besteht also aus drei aufeinander folgender ganzer Zahlen, die beliebig x, y und z zugeordnet werden können. Und da (**) und (*) auseinander durch Äquivalenzumformung entstanden sind, ist dies auch die Lösungsmenge von (*).

2. Beweis (Reduzierung der Anzahl Variablen): Sei (x,y,z) ein Tripel ganzer Zahlen, die die Gleichung (*) erfüllen. Da die Gleichung symmetrisch ist in x,y,z ist, können wir die Bezeichnung beliebig austauschen, also o.B.d.A. annehmen, dass $x \le y \le z$. Dann gibt es zwei nicht−negative ganze Zahlen a und b, für die $x = y - a$ und $z = y + b$. Mit dieser Substitution folgt aus (*):

$$\begin{aligned} 3 &= (y-a)^2 + y^2 + (y+b)^2 - (y-a)y - y(y+b) - (y+b)(y-a) \\ &= y^2 - 2ay + a^2 + y^2 + y^2 + 2yb + b^2 - y^2 + ay - y^2 - by - y^2 + ay - by + ab \\ &= a^2 + b^2 + ab. \end{aligned}$$

Es ist $a^2 \ge 0$, $b^2 \ge 0$, und da $a \ge 0$ und $b \ge 0$, ist auch $ab \ge 0$. Also wird die Zahl 3 als Summe dreier ganzer nicht−negativer Zahlen dargestellt. Dabei kann nicht $a = 0$ und auch nicht $b = 0$ sein, weil sonst $3 = a^2$ oder $3 = b^2$ übrig bleibt, und beides hat offensichtlich keine ganzzahlige Lösunge. Also sind alle drei Summanden ganzzahlig und größer als 0, hieraus folgt $a = b = 1$, und weiter $x = y - 1$ und $z = y + 1$.

Somit sind x, y und z drei aufeinander folgende ganze Zahlen.

Eine Probe bestätigt, dass jedes solche Tripel stets Lösung der Gleichung ist (und ersetzt eine Begründung, dass man auf sie verzichten kann, vgl. folgende Variante).

Variante (knapp formulierte gleichzeitige Herleitung der notwendigen und hinreichenden Bedingung, Verzicht auf die Annahme $x \le y \le z$): Die oben verwendete Substitution $a = y - x$ und $b = z - y$ ist für beliebige ganzzahlige y eindeutig umkehrbar zu $x = y - a$ und $z = y + b$, ferner sind a,b genau dann ganzzahlig, wenn x,z ganzzahlig sind. Obige Termumformung kann somit als Äquivalenzumformung der Gleichung (*) über der Grundmenge der ganzen Zahlen formuliert werden (oben gilt zunächst nur "$\Rightarrow$"):

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + ab = 3$$

Wendet man also auf die Lösungsmenge der einen Gleichung die angegebene Substitution an, so erhält man die Lösungsmenge der anderen Gleichung, wobei y beliebig ganzzahlig gewählt werden kann. Zur Bestimmung der Lösungsmenge der rechten Gleichung schließt man sofort $a = 0$ aus, ebenso $b = 0$. Es gilt $ab \ne 0$. Für $ab > 0$ erhält man $|a| \le 1$, $|b| \le 1$, hieraus mit Probieren die einzigen Lösungen $(a,b) \in \{(-1,-1), (1,1)\}$; und für $ab < 0$ schließt man $a^2 + b^2 + ab = 3 \Leftrightarrow (a+b)^2 = 3 + ab$, also folgt $-3 < ab < 0$, also $|a| < 3$, $|b| < 3$ und wieder mit Probieren die einzigen Lösungen $(a,b) \in \{(-1,+1), (1,-1), (-1,+2), (1,+2)\}$. Rücksubstitution dieser sechs Lösungen führen stets auf ein Tripel aufeinander folgender Zahlen (x,y,z) oder deren Permutationen.

3. Beweis (Zurückführen auf die Darstellung von 12 als Summe einer Quadratzahl und dem dreifachen einer Quadratzahl): Sei (x,y,z) ein Tripel ganzer Zahlen, die die Gleichung (*) erfüllen. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $x \ge y \ge z$, falls nicht, vertauschen wir in der folgenden Argumentation die Bezeichnungen x, y und z geeignet. Äquivalente Umformung ergibt

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3 \quad |\cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4yz - 4zx = 12 \\ \Leftrightarrow\ & (2x)^2 + y^2 + z^2 - 2\cdot 2xy - 2\cdot 2xz + 2yz + 3y^2 + 3z^2 - 6yz = 12 \\ \Leftrightarrow\ & (2x - y - z)^2 + 3(y - z)^2 = 12 \quad (****) \end{aligned}$$

Die Zahl 12 ist also Summe aus der Quadratzahl $(2x - y - z)^2$ und dem dreifachen der Quadratzahl. $(y - z)^2$. Einzige Möglichkeiten sind:

Fall 1: $(2x - y - z)^2 = 0$ und $(y - z)^2 = 2^2$. Weil $x \ge y \ge z$, ist $2x - y - z = 0$ und $y - z = 2$, also $y = z + 2$ und $2x = 2z + 2$, also $x = z + 1$. Dann sind z,x,y drei aufeinander folgende Zahlen; und falls $z \ge y$, sind nach analoger Rechung y,x,z drei aufeinander folgende Zahlen. Dies steht aber im Widerspruch zu $x \ge y \ge z$.

Fall 2: $(2x - y - z)^2 = 3^2$ und $(y - z)^2 = 1^2$. Weil $x \ge y \ge z$, sind die Terme in den Klammern sicher nicht negativ, d.h. es ist $2x - y - z = 3$ und $y - z = 1$, also $z = y - 1$. Einsetzen in $2x - y - z = 3$ ergibt dann als notwendige Bedingung $2x = 2y + 2$, also $x = y + 1 = z + 2$. Dann sind z,y,x drei aufeinander folgende Zahlen mit $x \ge y \ge z$.

Eine Probe mit $(x,y,z)= (k+1,k,k-1)$ bestätigt, dass diese Bedingung auch hinreichend ist (hier nicht ausgeführt, vgl. 1. Beweis).

4. Beweis: (Betrachtung mod 3 und quadratische Gleichung): Sei (x,y,z) ein Tripel ganzer Zahlen, die die Gleichung (*) erfüllen. Wir formen äquivalent um und erhalten

$$
\begin{aligned}
& & x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx &= 3 \qquad | + 3\cdot(xy+yz+zx)\\
&\Leftrightarrow & x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx &= 3+3\cdot(xy+yz+zx)\\
&\Leftrightarrow & (x+y+z)^2 &= 3\cdot(1+xy+yz+zx). \qquad (***)
\end{aligned}
$$

Nun betrachten wir die Restklassen mod 3 der linken Seite und der rechten Seite von (***):

Es gilt $(x+y+z)^2 \equiv 3\cdot(1+xy+yz+zx) \equiv 0 \ mod\ 3$, also $(x+y+z)^2 \equiv 0 \ mod\ 3$, also $x+y+z \equiv 0 \ mod\ 3$, also $(x+y+z)^2 \equiv 0 \ mod\ 9$. Damit gilt auf der rechten Seite $(1+xy+yz+zx) \equiv 0 \ mod\ 3$.

Es können keine zwei der drei Zahlen x,y,z der gleichen Restklasse mod 3 angehören: Aus $x \equiv y \ mod\ 3$ folgt $0 \equiv x+y+z \equiv 2x+z \ mod\ 3$. Einfaches Durchprobieren der drei Fälle $x \in \{0;1;2\}$ zeigt, dass dies nur für $z \equiv x \ mod\ 3$, also für $x \equiv y \equiv z \ mod\ 3$ erfüllbar ist. Dies führt aber zu einem Widerspruch, weil dann links $(x+y+z)^2 \equiv 0 \ mod\ 9$ gilt, aber rechts $3\cdot(1+xy+yz+zx) \equiv 3\cdot(1+3x^2) \equiv 3+9x^2 \equiv 3 \ mod\ 9$.

Die drei Zahlen x,y,z gehören also drei verschiedenen Restklassen mod 3 an. Es gibt also zwei ganze Zahlen m und n, sodass o.B.d.A $y = x+3m+1$ und $z = x+3n+2$ (falls nicht, vertausche man in der folgenden Argumentation die Variablen x und y geeignet). Dies setzen wir in (*) ein und erhalten die notwendige Bedingung

$$
\begin{aligned}
& x^2+(x+3m+1)^2+(x+3n+2)^2-x(x+3m+1)-(x+3m+1)(x+3n+2)-(x+3n+2)x = 3\\
\Leftrightarrow\quad & m^2-mn+(n^2+n)=0.
\end{aligned}
$$

Diese notwendige Bedingung deuten wir als quadratische Gleichung mit der ganzzahligen Variablen m und dem ganzzahligen Parameter n, sie hat nach bekannter Formel die Lösung

$$m_{1,2} = m(n) = \frac{n \pm \sqrt{n^2-4(n^2+n)}}{2} = \frac{n \pm \sqrt{-n(3n+4)}}{2}.$$

Reelle Lösungen m gibt es nur für $-n(3n+4) \geq 0$, also für $-4/3 \leq n \leq 0$, und da n ganzzahlig sein muss, gilt $n=0$ oder $n=-1$; dies führt zur notwendigen Bedingung $(m,n)=(0;0)$ oder $(m,n)=(0;-1)$ oder $(m,n)=(-1;-1)$.

Die Lösung $(m,n) = (0;0)$ führt zum Zahlentripel $(x, x+1, x+2)$,
die Lösung $(m,n) = (0;-1)$ führt zum Zahlentripel $(x, x+1, x-1)$,
die Lösung $(m,n) = (-1;-1)$ führt zum Zahlentripel $(x, x-2, x-1)$;

wobei x nicht weiter eingeschränkt ist. Dies sind in jedem Fall drei aufeinander folgende ganze Zahlen. Dass die Zahlen dieser Tripel tatsächlich die Gleichung (*) erfüllen, überprüfen wir durch Einsetzen. Es genügt, dies für das Tripel $(x-1, x, x+1)$ zu tun. Es ergibt sich tatsächlich

$$
\begin{aligned}
& x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\
&= (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 - (x-1)x - x(x+1) - (x+1)(x-1)\\
&= x^2-2x+1 + x^2 + x^2+2x+1 - x^2+x - x^2-x - x^2+1\\
&= 3.
\end{aligned}
$$

5. Beweis (Deutung als quadratische Gleichung mit Variabler z und Parametern x,y): Wir setzen als bekannt voraus:

HS: Für ganzzahlige $n \geq 0$ gilt: $\sqrt{n}$ rational $\Leftrightarrow$ $\sqrt{n}$ ganzzahlig $\Leftrightarrow$ n ist Quadrat einer ganzen Zahl.

Wir formen äquivalent um:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \qquad z^2 - z(x + y) + (x^2 + y^2 - xy - 3) = 0,$$

und betrachten dies als quadratische Gleichung mit der Variablen z und den Parametern x und y.

Nach bekannter Lösungsformel ergibt sich

$$z = \frac{(x+y) \pm \sqrt{(x+y)^2 - 4(x^2+y^2-xy-3)}}{2} = \frac{(x+y) \pm \sqrt{3\left(4-(x-y)^2\right)}}{2}.$$

Reelle Lösungen z kann es nur für $(x - y)^2 \leq 4$ geben, also für $|x - y| \leq 2$. Rationale Lösungen z kann es nur geben, falls der Wurzelausdruck rational ist, dies wiederum nur, wenn $3(4-(x - y)^2)$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Es bleibt nur $(x - y)^2 = 1$, also $\sqrt{3(4-1)} = 3$ und $x = y + 1$ oder $x = y - 1$; oder $(x - y)^2 = 2$, also $\sqrt{3(4-4)} = 0$ und $x = y + 2$ oder $x = y - 2$.

Falls $x = y + 1$, erhalten wir Lösungen $z_{1,2} = \frac{(x+y) \pm 3}{2} = \frac{2y+1 \pm 3}{2}$, also $z_1 = y + 2$ und $z_2 = y - 1$, dann sind y, $x = y + 1$ und $z_1 = y + 2$ drei aufeinander folgenden ganze Zahlen, ebenso $z_2 = y - 1$, y und $x = y + 1$.

Falls $x = y - 1$, erhalten wir Lösungen $z_{3,4} = \frac{(x+y) \pm 3}{2} = \frac{2y-1 \pm 3}{2}$, also $z_3 = y + 1$ und $z_4 = y - 2$, also wieder drei aufeinander folgende Zahlen $x = y - 1$, y, $z_3 = y + 1$ bzw. $z_4 = y - 2$, $x = y - 1$, y.

Falls $x = y + 2$, erhalten wir die Lösung $z_5 = \frac{(x+y) \pm 0}{2} = \frac{2y+2}{2}$, also $z_5 = y + 1$ und so die drei aufeinander folgende Zahlen y, $z_5 = y + 1$, $x = y + 2$.

Falls $x = y - 2$, erhalten wir die Lösung $z_6 = \frac{(x+y) \pm 0}{2} = \frac{2y-2}{2}$, also $z_6 = y - 1$ und so die drei aufeinander folgende Zahlen $x = y - 2$, $z_5 = y - 1$, y.

Es bleibt noch anzumerken, dass nach Vorgabe eines ganzzahligen y auch stets x und die z_i ganzzahlig sind.

Eine Probe mit $(x,y,z) = (k+1,k,k-1)$ bestätigt, dass jedes Tripel von drei aufeinander folgenden Zahlen die Gleichung (*) erfüllen (hier nicht ausgeführt, vgl. 1. Beweis).

Bemerkung: Je nach Beweisansatz ist ein Ergebnis "x,y,z sind drei aufeinander folgende ganze Zahlen" nur eine notwendige Bedingung, dann ist entweder eine Probe nötig oder ein Nachweis, dass die Schlussrichtung umkehrbar ist. Oft ist ein Probe erheblich kürzer und einfacher durchzuführen, vgl. 1. und 2. Beweis.

Aufgabe 3: Gegeben sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AECF$ mit gemeinsamer Diagonale AC, wobei E und F im Inneren des Parallelogramms $ABCD$ liegen.

Zeige: Die Umkreise der Dreiecke AEB, BFC, CED und DFA haben einen Punkt gemeinsam.

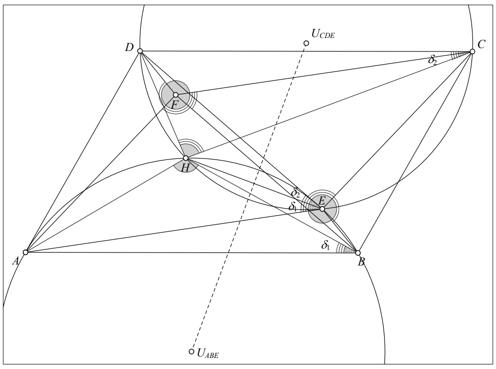
Gemeinsame Bezeichnungen und Vorbemerkungen: Die Umkreise der Dreiecke AEB, BFC, CED und DFA seien mit k_1, k_2, k_3 bzw. k_4 bezeichnet. Die Kreise k_1 und k_3 haben außer E noch einen weiteren (evtl. mit E zusammenfallenden) Punkt gemeinsam; diesen bezeichnen wir mit H und werden zeigen, dass H auch auf k_2 und k_4 liegt. In einer Variante werden wir H definieren als den von A verschiedenen Schnittpunkt von k_1 und k_4 und dann zeigen, dass auch k_2 und k_3 diesen Punkt enthalten.

Der Mittelpunkt der gemeinsamen Diagonalen AC sei mit S bezeichnet. Weil Parallelogramme punktsymmetrisch zum Mittelpunkt ihrer Diagonalen sind, können die Bedingungen der Aufgabe vollständig aus der Vorgabe der Punkte A, B, E und S beschrieben werden; die Bilder dieser Punkte bei Punktspiegelung an S sind dann C, D, F und S.

Gemeinsame Behandlung von Sonderfällen: Falls durch eine Ecke noch ein dritter Kreis geht, z.B. durch die Ecke D außer k_2 und k_4 auch noch k_1, dann liegen A, E, B und D auf k_1. Aus Symmetriegründen liegen dann auch C, F, D und B auf einem Kreis, dies ist k_4. Also haben alle vier Kreise den Punkt D gemeinsam, und weil k_1 und k_3 die gemeinsame Sehne ED mit $E \neq D$ haben, ist $H = D$. Analoges gilt für die anderen Ecken. Wir können also für die weitere Untersuchung ausschließen, dass der Punkt H auf einer der Ecken liegt; und − wenn H der Schnittpunkt von k_1 und k_3 ist − auch den Fall $H = F$.

1. Beweis: Die Verbindungsstrecken von E zu den vier Ecken des Parallelogramms $ABCD$ teilen den Vollwinkel bei E auf in vier Winkel, gleiches gilt für die Verbindungsstrecken von F mit den vier Ecken. Weil die genannten Punkte punktsymmetrisch bzgl. des gemeinsamen Diagonalenschnittpunktes liegen, sind entsprechende Winkel gleich:

$$\alpha := \angle AEB = \angle CFD,\ \beta := \angle BEC = \angle DFA,$$
$$\gamma := \angle CED = \angle AFB,\ \delta := \angle DEA = \angle BFC,$$



(in der Figur mit 1/2/3/4 Strichen dargestellt). Da die Punkte E und F im Innern des (konvexen!) Parallelogramms $ABCD$ liegen, gilt offensichtlich

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$

Sei nun H der zweite (evtl. mit E zusammenfallende) Schnittpunkt von k_1 und k_3.

Fall 1: H liegt im Innern des Parallelogramms $ABCD$ (vgl. Figur). Dann liegen H und E in der gleichen Halbebene bzgl. der Geraden AB und auch bzgl. der Geraden CD. Nach Umfangswinkelsatz an k_1 über der Sehne AB gilt dann $\angle AHB = AEB = \alpha$, und analog über der Sehne CD im Kreis k_3 gilt $\angle CHD = \angle CED = \gamma$.

Weiter liegen H und F beide in der gleichen Halbebene bzgl. der Geraden BC und auch bzgl. der Geraden AD. Dann genügt es zu zeigen, dass $\angle BHC = \delta$, denn aus der Umkehrung des Umfangswinkelsatzes an k_2 über der Strecke BC folgt aus $\delta = \angle BFC = \angle BHC$, d.h. dass H auf dem Kreis k_2 liegt; und weil $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, gilt $\angle DHA = \beta$ und wieder mit Umkehrung des Umfangswinkelsatzes an k_4 über der Strecke DH folgt aus $\beta = \angle DFB = \angle DHB$, dass H auch auf k_4 liegt.

Fall 1.1: A, H, E und B liegen in dieser Reihenfolge auf k_1, $H \neq E$ (vgl. Figur). Dann liegen D, H, E und C in dieser Reihenfolge auf k_3 und die Strecke EH liegt im Winkelfeld von $\delta = \angle DEA$, d.h. für die beiden Winkel $\delta_1 := \angle HEA$ und $\delta_2 := \angle DEH$ gilt $\delta_1 + \delta_2 = \delta$. Nun ergibt sich mit Umfangswinkelsatz im Kreis k_1 über der Sehne AB, dass $\angle HBA = \angle HEA = \delta_1$ und im Kreis k_3 über der Sehne DH, dass $\angle DCH = \angle DEA = \delta_2$. Dies benützen wir zusammen mit der Innenwinkelsumme im Dreieck HCB und der Tatsache, dass im Parallelogramm sich benachbarte Winkel zu 180° ergänzen und schließen

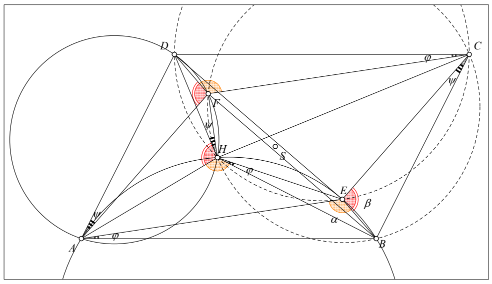
$$\angle BHC = 180° - \angle CBH - \angle HCB = 180° - (\angle CBA - \delta_1) - (\angle DCB - \delta_2)$$
$$= 180° - (\angle CBA + \angle DCB) + \delta_1 + \delta_2 \qquad = 180° - 180° + \delta_1 + \delta_2$$
$$= \delta,$$ das war zu zeigen.

Fall 1.2: A, E, H und B liegen in dieser Reihenfolge auf k_1, $E = H$ möglich: Für $H \neq E$ vertauschen wir in obiger Argumentation die Bezeichnungen A und B, C und D, aber nicht E und F, dazu auch die davon abhängigen Größen, also β und δ, k_2 und k_4 usw. und kommen zum gleichen Ergebnis. Im Grenzfall $H = E$ betrachten wir die gemeinsame Tangente in E und argumentieren mit Sehnen−Tangenten−Satz.

Variante zu Fall 1.1: Seien $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ wie oben definiert, aber H als Schnittpunkt von k_1 und k_4. Dann liegen F und H auf k_4 auf der gleichen Seite bzgl. der Sehne AD, d.h. es ist $\angle DHA = \angle DFA = \beta$, und da H und E auf k_1 auf der gleichen Seite bzgl. AB liegen, ist $\angle AHB = \angle AEB = \alpha$, also

$$\angle BHD = 360° - (\alpha + \beta) = \gamma + \delta = \angle CEA = \angle AFC,$$

und da E immer im Dreieck ABC liegt und F in Dreieck ACD, gilt diese Beziehung für jede Lage, bei der H im Innern des Parallelogramms $ABCD$ liegt.



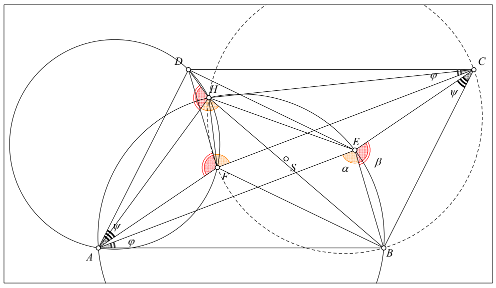
Wir zeigen, dass H auf k_2 liegt: Falls die Punkte A, H, F, D in dieser Reihenfolge auf k_4 liegen, dann gilt mit Umfangswinkelsatz in k_4 über der Sehne DF zusammen mit der Punktsymmetrie bzgl. S, dass

$$\psi := \angle FHD = \angle FAD = \angle ECB,$$

und im Viereck $BHFC$ gilt dann unabhängig von der relativen Lage von H und E bzgl. A und B

$$\angle BHF + \angle FCB = \gamma + \delta - \psi + \psi + \angle FCE$$
$$= \gamma + \delta - \psi + \psi + 180° - (\gamma + \delta) = 180°,$$

also ist $BHFC$ ein Sehnenviereck in k_2.



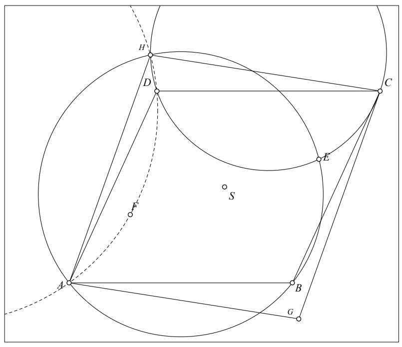
Falls A, F, H, D in dieser Reihenfolge auf k_4 liegen, gilt

$$\angle FHB = \angle DHB - \angle DHF = \alpha + \beta - \angle DHF$$
$$= \alpha + \beta - (180° - \psi) = 360° - (\gamma + \delta) - 180° + \psi$$
$$= 180° - (\gamma + \delta) + \psi = \angle FCE + \psi = \angle FCB,$$

also ist auch hier $FHCB$ ein Sehnenviereck in k_2.

Analog zeigen wir, dass H auf k_3 liegt, wobei wir den Winkel $\varphi := \angle BAE = \angle DCF$ benützen. Je nach Lage von A, H, E und B ist dann $\angle EBH = \varphi$ oder $\varphi = 180° - \angle EHB$.

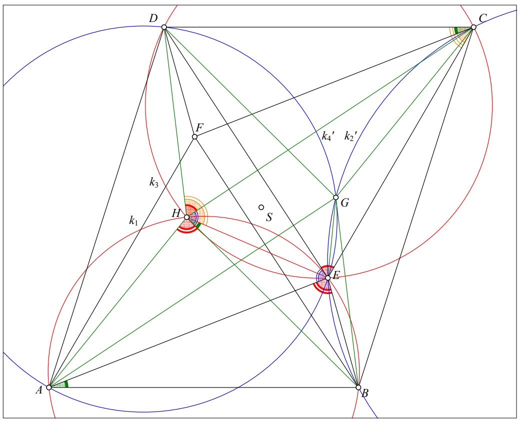
Fall 2: H liegt außerhalb von Parallelogramm $ABCD$: Hier lassen sich analoge Überlegungen anstellen, dabei muss man anstatt mancher Winkel deren Ergänzung zu 180° oder 360° betrachteen und manche Winkel subtrahieren anstatt addieren. Wir können aber auch folgendermaßen schließen:



Man kann zeigen, dass H dann nicht im Streifen zwischen den Geraden AB und CD liegt und auch nicht im Streifen zwischen den Geraden AD und BC (in diesen Fällen liegt E außerhalb von $ABCD$).

Sei z.B. H im Winkelfeld bei D. Wir ergänzen die Figur durch den zu H punktsymmetrisch bzgl. S liegenden Punkt G und erhalten das Parallelogramm $AHCG$. Nach Konstruktion haben die Parallelogramme $AHCG$ und $ABCD$ die gemeinsame Diagonale AC, und weil H nicht in den oben erwähnten Streifen liegt, liegen die Punkte B und D im Innern des Parallelogramms $AHCG$. Außerdem schneiden sich die Kreise HBA und HDC im innen liegenden Punkt E.

Nach der Argumentation in der Variante des 1. Beweises (anstatt Parallelogramm $ABCD$ betrachten wir jetzt $HAGC$, die Kreise HBA und HDC entsprechen k_1 und k_4) können wir nun schließen, dass auch die Kreise GCB und AGD durch E gehen. Unter Ausnutzung der Symmetrie folgern wir, dass die Kreise HAD und CHB den Punkt F enthalten. Eine Umformulierung ergibt wie gewünscht: Die Kreise AFD, BFC, CED und DFA gehen alle durch den Punkt H.



Variante zu Fall 1: Wir betrachten die vier Kreise, die durch den gemeinsamen Punkt E und je zwei aufeinander folgende Ecken des Parallelogramms $ABCD$ verlaufen, also k_1 und k_3 sowie die Bilder von k_2 und k_4 bei Punktspiegelung an S (hier mit k_2' und k_4' bezeichnet. Wie in Beweis 1 sei H der (evtl. mit E zusammenfallende) zweite Schnittpunkt von k_1 und k_3, weiter sei G der zweite Schnittpunkt von k_2' und k_4'.

Weil H und E auf den Kreisen k_1 und k_3 liegen, ist $\angle AHB = \angle AEB$ und $\angle CHD = \angle CED$ (Umfangswinkelsatz über der gemeinsamen Sehne AB in Kreis k_1 bzw. CD in k_3). Weiter ist $\angle BHE = \angle BAE = \angle DCF$ (gemeinsame Sehne BE im Kreis k_1 und Punktsymmetrie). Also ist $DHEC$ Sehnenviereck in k_3 und es folgt zusammen mit den Winkeleigenschaften im Parallelogramm $AECF$

$$\angle BHD = \angle BHE + \angle EHD = \angle DCF + 180° - \angle DCE = 180° - (\angle DCE - \angle DCF)$$
$$= 180° - \angle FCE = \angle CEA = \angle AFC.$$

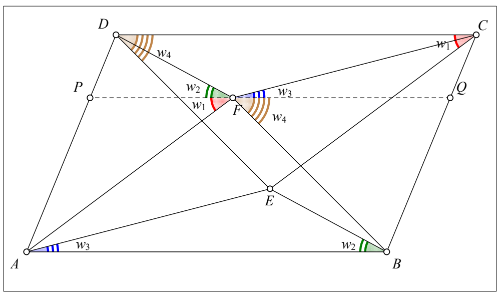
Weiter ist $\angle BHC = \angle BHD - \angle CHD = \angle CEA - \angle CED = \angle DEA$.

Also teilen die Strahlen $[HA$, $[HB$, $[HC$ und $[HD$ den Vollwinkel bei H in die gleichen Winkel auf wie $[EC$, $[ED$, $[EA$ und $[EB$ den Vollwinkel bei E aufteilen. Insbesondere ist − unter Ausnutzung der Punktsymmetrie bzgl. S − $\angle DHA = \angle BEC = \angle DFA$. Wir deuten nun k_2' als Fasskreis zum Winkel $\angle BEC$ über der Sehne BC und stellen fest, dass $\angle BEC = \angle BGC$. Das Bild von k_2' bei Punktspiegelung an S ist k_2, also enthält k_2 die Sehne DA und die Punkte F, H und G'; später werden wir feststellen, dass $G' = H$.

In gleicher Weise können wir k_4' als Fasskreis zu den Winkeln $\angle DEA$ deuten und schließen, dass $\angle DEA = \angle DGA$, und wissen nun, dass k_4 die Punkte B, C, F, H und G' enthält.

Bemerkung: Als Nebenergebnis erhalten wir zusätzlich, dass die Strahlen $[GA$, $[GB$, $[GC$ und $[GD$ den Vollwinkel bei G in die gleichen Winkel aufteilen wie die Strahlen $[EC$, $[ED$, $[EA$ und $[EB$ den Vollwinkel bei E. Weiter enthalten nun die Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 den Punkt H und den Punkt G'. Da aber je zwei dieser Kreise sich zusätzlich in einer Ecke des Parallelogramms $ABCD$ schneiden, muss $H = G'$ sein. Damit liegt G punktsymmetrisch zu H und die Figur enthält fünf Parallelogramme und zwei Tripel mit gemeinsamer Diagonalen.

2. Beweis: Wir ergänzen die Figur um die Parallele zu AB durch F.



Da F im Innern des Parallelogramms $ABCD$ liegt, schneidet diese Parallele die Strecken AD und BC in inneren Punkten, die wir P bzw. Q nennen. Wir stellen fest, dass der Strahl FP im Winkelfeld von $\angle DFA$ liegt und somit diesen Winkel in zwei Teilwinkel $w_1 := \angle PFA$ und $w_2 := \angle DFP$ aufteilt. Unabhängig von der Lage von E und F verläuft FP durch das Innere des Dreiecks DFA, es gilt also stets $\angle DFA = w_1 + w_2$. Analog teilt der Strahl FQ den Winkel $\angle BFC$ auf in die Winkel $w_3 := \angle QFC$ und $w_4 := \angle BFQ$ mit $\angle BFC = w_3 + w_4$ auf.

Da $ABCD$, $AECF$ und $DEBF$ Parallelogramme mit gemeinsamem Symmetriezentrum sind, gibt es viele Paare paralleler Geraden, z.B. gilt $AE \parallel FC$ usw. Also tauchen die Winkel w_i doppelt auf:

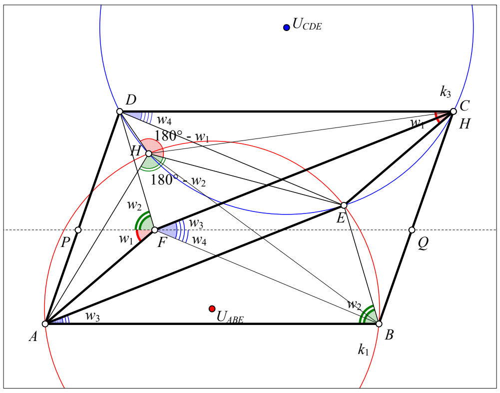
$$\angle DCE = \angle PFA = w_1,\ \angle EBA = \angle DFP = w_2,\ \angle BAE = \angle QFC = w_3,\ \angle EDC = \angle BFQ = w_4.$$

Sei nun H der zweite (evtl. mit E zusammenfallende) Schnittpunkt von k_1 und k_3. Wir werden zeigen, dass H auf k_4 und auf k_2 liegt. Hierzu unterscheiden wir nach möglichen Lagen von H.

Fall 1: H liegt im Innern des Parallelogramms:

Dann liegen H und E auf dem gleichen Bogen von k_1 über der Sehne AB und von k_3 über CD. Nach Umfangswinkelsatz genügt es also nachzuweisen, dass $\angle DHA = \angle DFA$ und $\angle BHC = \angle BFC$.

Fall 1.1: Die Punkte A, H, E und B liegen in dieser Reihenfolge auf k_1 (vgl. Figur):



Dann liegen D, H, E und C in dieser Reihenfolge auf k_3 und die Vierecke $ABEH$ und $DHEC$ sind Sehnenvierecke in k_1 bzw. k_3, in denen die Ecken H und B bzw. H und C gegenüberliegen. Also gilt

$$\angle AHE = 180° - \angle EBA = 180° - w_2 \quad \text{und}$$
$$\angle EHD = 180° - \angle DCE = 180° - w_1.$$

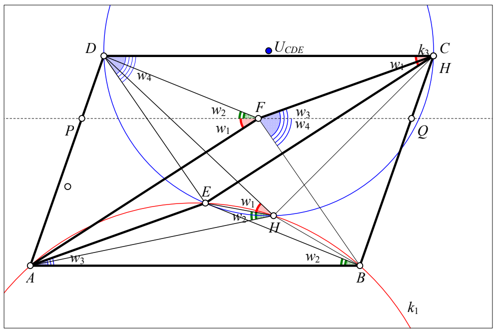
Diese beiden Winkel bilden zusammen mit $\angle DFA$ einen Vollwinkel, also gilt

$$\angle DHA = 360° - (180° - w_2) - (180° - w_1)$$
$$= w_1 + w_2 = \angle DFA, \text{ d.h. } H \text{ liegt auf } k_4.$$

In analoger Weise schließen wir (in der Figur wurde zur besseren Übersichtlichkeit die Markierungen der Winkel w_3 und w_4 bei H weggelassen)

$$\angle BHC = \angle BHE + \angle EHC = \angle BAE + \angle EDC = w_3 + w_4$$
$$= \angle BFC, \quad \text{d.h. } H \text{ liegt auf } k_2.$$

Fall 1.2: A, E, H, B liegen in dieser Reihenfolge auf k_1, also D, E, H, C in dieser Reihenfolge auf k_3:



Wir können ähnlich argumentieren wie im Fall 1.1: Es gilt

$$\angle DHA = \angle DHE + \angle EHA = \angle DCF + \angle EBA$$
$$= w_1 + w_2 = \angle DFA,$$

d.h. H liegt auf k_4, und

$$\angle BHC = 360° - \angle EHB - \angle CHE$$
$$= 360° - (180° - \angle BAE) - (180° - \angle CHD)$$
$$= w_3 + w_4 = \angle BFC, \quad \text{d.h. } H \text{ liegt auf } k_2.$$

Fall 2: H liegt außerhalb: vgl. 1. Beweis.

3. Beweis (Zurückführen auf die Konfiguration des Satzes von MIQUEL):

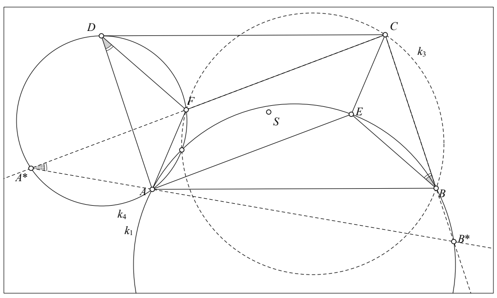
HS (Satz von MIQUEL): Zu einem Dreieck UVW seien X, Y und Z Punkte auf den Geraden UV, VW bzw. WU. Dann haben die (evtl. zu einem Punkt degenerierten) Umkreise der Dreiecke XYV, YZW und ZXU einen gemeinsamen Punkt.

Fall 1: Eine Ecke des Parallelogramms $ABCD$ ist gemeinsamer Punkt von drei der k_i. Dann ist diese Ecke gemeinsamer Punkt aller vier k_i. Dies zeigen wir unter Anwendung der Punktsymmetrie für die Ecke A und die Kreise k_1, k_4 und k_2, für die anderen Ecken und Kombinationen von Kreisen schließt man analog:

A liegt auf k_2 $\Leftrightarrow$ $ABCF$ ist Sehnenviereck $\Leftrightarrow$ $CDAE$ ist Sehnenviereck $\Leftrightarrow$ A liegt auf k_3.

Fall 2: nicht Fall 1, d.h. keine Ecke liegt auf mehr als zwei Kreisen k_i:

Wir konstruieren ein Dreieck A^*B^*C derart, dass der Punkt A auf der Geraden A^*B^*, der Punkt F auf der Geraden A^*C und der Punkt B^* auf der Geraden CB liegt. Auf diese Konfiguration wenden wir den Satz von MIQUEL an:



Da F im Innern des Dreiecks ACD liegt, schneidet der Strahl CF die Seite AD in einem inneren Punkt; dieser Punkt ist gleichzeitig innerer Punkt von k_4, also schneidet der Strahl [CF den Kreis k_4 in einem weiteren Punkt, dieser sei A^*. Die

Punkte A^*, A, F und D sind alle verschieden und liegen in dieser Reihenfolge auf k_4.

Der Strahl $[A^*A$ schneidet den Strahl $[CB$ in einem Punkt, dieser sei B^*. Mögliche Lagen sind: B zwischen B^* und C, $B^* = B$ sowie B^* zwischen B und C; die Lage C zwischen B und B^* ist nicht möglich, weil A^*A nicht durch das Innere des Parallelogramms $AECF$ verlaufen kann.

Mit Umfangswinkelsatz über der Sehne AF in k_4 und Punktsymmetrie bzgl. S folgt in jeder Lage

$$\angle B^*A^*C = \angle AA^*F = \angle ADF = \angle CBE.$$

Weil $AECF$ ein Parallelogramm ist, gilt $\angle CEA = 180° - \angle FCE$, und mit Winkelsummensatz im Dreieck CBE gilt $\angle BEC = 180° - \angle ECB - \angle CBE$; also können wir am Vollwinkel bei E folgern:

$$\begin{aligned}\angle AEB &= 360° - \angle CEA - \angle BEC = 360° - (180° - \angle FCE) - (180° - \angle ECB - \angle CBE)\\ &= \angle FCE + \angle ECB + \angle CBE = \angle FCB + \angle CBE\\ &= \angle A^*CB^* + \angle B^*A^*C = 180° - \angle CB^*A^*.\end{aligned}$$

Falls nun B zwischen C und B^* liegt, ist das Viereck AB^*BE konvex und die Winkel bei E und B^* ergänzen sich zu 180°, und falls B^* zwischen C und B liegt, ist das Viereck ABB^*E konvex und die Winkel $\angle AEB$ und $\angle AB^*B$ sind gleich. In jedem Fall liegt B^* auf dem Umkreis von Dreieck ABE, also auf k_1.

Nun sind die Voraussetzungen des Satzes von MIQUEL erfüllt: Im Dreieck A^*B^*C sind A, B und F Punkte auf den Seiten A^*B^*, B^*C bzw. CA^*. Also können wir folgern, dass die Umkreise der Dreiecke A^*AF (also k_4), CBF (also k_2) und B^*AB (also k_1) einen Punkt H gemeinsam haben; nach Fallunterscheidung kann dies nur der von A verschiedene Schnittpunkt von k_1 und k_4 sein.

Mit analoger Argumentation schließen wir, dass die Kreise k_1, k_3 und k_4 einen gemeinsamen Punkt haben; hierzu definieren wir C^* als Schnittpunkt von $[A^*C$ mit BC und betrachten die Winkel $\angle CA^*C^* = \angle FA^*D = \angle FAD = \angle ECB$. Wieder kann dies nur der von A verschiedene zweite Schnittpunkt von k_1 und k_4 sein. Also haben k_1, k_2, k_3 und k_4 den Punkt H gemeinsam.

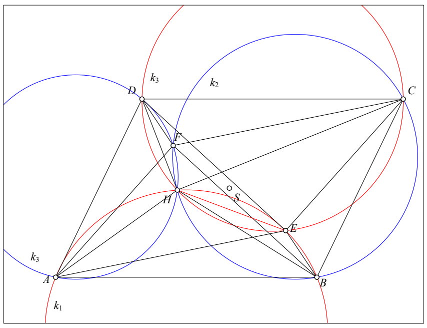
Quellen: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1604/1604.06995.pdf

4. Beweis (Satz von PTOLEMÄUS): In diesem Beweis bezeichnen wir die Länge der Strecke XY ebenfalls mit XY; Verwechslungen sind nicht zu befürchten.

HS 1 (PTOLEMÄUS in "verschärfter" Form): Für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt H der Ebene des Dreiecks gilt

$$AB \cdot CH + BC \cdot HA - AC \cdot BH \geq 0,$$

wobei Gleichheit genau dann besteht, wenn A,B,C,H in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis von Dreieck ABC liegen.



Die Lagebeziehungen seien zunächst wie in der Figur, d.h.

A,B,E,H liegen in dieser Reihenfolge auf k_1, (1')
B,C,F,H liegen in dieser Reihenfolge auf k_2, (2')
C,D,H,E liegen in dieser Reihenfolge auf k_3, (3')
D,A,H,F liegen in dieser Reihenfolge auf k_4. (4')

Mit HS 1 gilt für einen beliebigen Punkt H und für die Umkreise der Dreiecke ABE und BCE, also für k_1 und k_2

$$AB \cdot EH + BE \cdot AH - AE \cdot BH \geq 0 \qquad (1)$$

$$BC \cdot FH + CF \cdot BH - BF \cdot CH \geq 0 \qquad (2)$$

wobei Gleichheit genau dann herrscht, wenn (1') und (2') erfüllt sind.

Wir addieren die linken Seiten von (1) und (2), ebenso die rechten Seiten. Weil $AE = CF$ und weil bei der Addition die Ungleichung erhalten bleibt, gilt

$$AB \cdot EH + BE \cdot AH + BC \cdot FH - BF \cdot CH \geq 0. \qquad (1)+(2)$$

Offensichtlich gilt Gleichheit in (1)+(2) genau dann, wenn in (1) und (2) Gleichheit herrscht, d.h. wenn H der Schnittpunkt von k_1 und k_2 ist und (1') und (2') erfüllt sind.

Nun argumentieren wir analog für die Umkreise der Dreiecke CDE und DAF, also k_3 und k_4: Für einen beliebigen Punkt H gilt unter Verwendung von $CE = AF$:

$$CD \cdot EH + CE \cdot DH - DE \cdot CH \geq 0 \qquad (3)$$

$$DA \cdot FH + DF \cdot AH - AF \cdot DH \geq 0 \qquad (4)$$

$$CD \cdot EH + DA \cdot FH + DF \cdot AH - DE \cdot CH \geq 0 \qquad (3) + (4),$$

und mit $CD = AB$, $DE = BF$ und mit einer Umstellung erhalten wir die gleiche Bedingung wie oben:

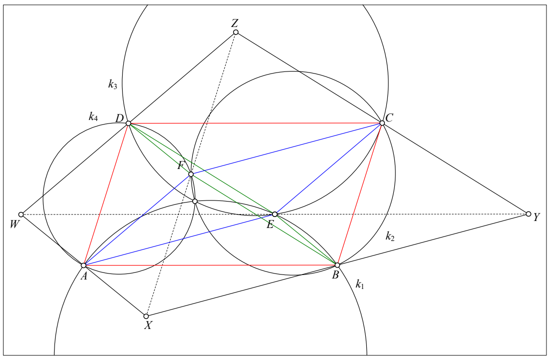
$$AB \cdot EH + BE \cdot AH + BC \cdot FH - BF \cdot CH \geq 0 \qquad (1)+(2)^*.$$

und Gleichheit ist genau dann gegeben, wenn (3') und (4') erfüllt sind.

Wenn wir nun H als Schnittpunkt von k_1 und k_2 wählen, dann herrscht sowohl in (1)+(2) als auch in (1)+(2)* Gleichheit, d.h. H ist auch Schnittpunkt von k_3 und k_4, das war zu zeigen.

Für die anderen Lagemöglichkeiten von H auf den Umkreisen kann man entsprechend verfahren.

5. Beweis (PONCELET−Punkt): Wir spiegeln E am Mittelpunkt von AB und am Mittelpunkt von CD und erhalten so die Punkte X und Z, Spiegelung von F am Mittelpunkt von BC und am Mittelpunkt von AD ergibt Y und W. Weil E und F im Innern von $ABCD$ liegen, liegen W, X, Y und Z außerhalb von $ABCD$, sie bilden ein konvexes Viereck $WXYZ$, d.h. keine drei dieser Punkte sind kollinear und keine drei der sechs Verbindungsgeraden von je zweien dieser Punkte gehen durch den gleichen Punkt.



Aufgrund der Voraussetzung und der Definition von W und X sind nun die Strecken WA, DF, EB und AX parallel, gleich gerichtet und gleich lang. Also ist A der Mittelpunkt der Strecke PQ.

Mit analoger Argumentation stellen wir fest, dass B, C, D, E und F Mittelpunkte der Strecken XY, YZ, ZW, WY bzw. ZX sind. (Interessant, aber hier unwichtig: $WY \parallel AB \parallel DC$ und $XZ \parallel AD \parallel BC$.)

Die vier Dreiecke AEB, BFC, CED und DFA sind also die Mittendreiecke der vier Dreiecke WXY, XYZ, YZW bzw. ZWX. Die Umkreise der ersten vier Dreiecke sind demnach die FEUERBACH− (oder auch Neun−Punkte−) Kreise der zweiten vier Dreiecke.

Für diese Konfiguration hat PONCELET herausgefunden, dass diese vier FEUERBACH−Kreise einen Punkt gemeinsam haben (sogar auch, wenn S im Innern von Dreieck PQR liegt, manchmal sind auch alle vier Feuerbachkreise identisch). So können wir uns auf im Internet findbare Beweise mit Winkeljagd berufen, von denen allerdings die meisten die Lagediskussion nur unvollständig führen.

Quellen: https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/PonceletPoint.shtml
https://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG2009Volume9.pdf#page=51

6. Beweis (komplexe Zahlen): Wie üblich identifizieren wir den Punkt $Z(x,y)$ mit der komplexe Zahl $z = (x + iy)$; wir verwenden zur Bezeichnung entsprechende große und kleine Buchstaben. Als bekannt setzen wir folgendes Kriterium voraus: Die Punkte c, d, e und h , $h \neq d$ (den Fall $h = d$ haben wir in der Eingangsbemerkung ausgeschlossen), $e \neq c$ liegen genau dann auf einem (evtl. zur Geraden entarteten) Kreis, wenn der Term $\frac{h-e}{h-d}\cdot\frac{d-c}{e-c}$ reell ist.

Die Punkte C, D und F liegen punktsymmetrisch bzgl. S. Es gilt also $s = \frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{2}(b + d) = \frac{1}{2}(e + f)$, also $c = 2s - a$, $d = 2s - b$ und $f = 2s - e$; insbesondere $d - c = a - b$, $f - d = b - e$, $f - c = a - e$. (*)

Wir legen ein kartesisches Achsenkreuz so auf die Figur, dass der Kreis (abe) der Einheitskreis ist. Dann definieren wir h als den (evtl. mit e zusammenfallenden zweiten) Schnittpunkt des Kreises (abe) mit dem Kreis (cde), berechnen h in Abhängigkeit von a, b, e und s und zeigen anschließend, dass h auch auf den Kreisen (adf) und (bcf) liegt.

Mit (*) können wir umformen: $t := \frac{h-e}{h-d}\cdot\frac{d-c}{e-c} = \frac{h-e}{h-d}\cdot\frac{a-b}{e-c}$. Dieser Ausdruck ist genau dann reell, wenn er identisch mit seinem konjugiert komplexen Wert ist. So erhalten wir nach bekannten Rechenregeln

$$\frac{h-e}{h-d}\cdot\frac{a-b}{e-c} = \frac{\overline{h}-\overline{e}}{\overline{h}-\overline{d}}\cdot\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{e}-\overline{c}} \Rightarrow t = \overline{t} \Rightarrow h \text{ ist Schnittpunkt der Kreise } (abe) \text{ und } (cde). \text{ (**)}$$

Da a,b,e,h auf dem Einheitskreis liegen, gilt $a\overline{a} = b\overline{b} = e\overline{e} = h\overline{h} = 1$, und $(\overline{a}-\overline{b}) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ und damit $a - b = -ab(\overline{a}-\overline{b})$ sowie $h - e = -he(\overline{h}-\overline{e})$ (***). Hiermit können wir (**) umformen:

$$
\begin{aligned}
\text{(**)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-he\left(\overline{h}-\overline{e}\right)}{h-d}\cdot\frac{-ab\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}{e-c} &= \frac{\overline{h}-\overline{e}}{\overline{h}-\overline{d}}\cdot\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{e}-\overline{c}} \\
\Leftrightarrow \quad abeh\left(\overline{h}-\overline{d}\right)\left(\overline{e}-\overline{c}\right) &= \left(h-d\right)\left(e-c\right), \\
\Leftrightarrow \quad abeh\overline{h}\overline{e} - abeh\overline{h}\overline{c} - abeh\overline{d}\overline{e} + abeh\overline{d}\overline{c} &= he - hc - de + dc \\
\Leftrightarrow \quad ab - abe\overline{c} - abh\overline{d} + abeh\overline{d}\overline{c} &= he - hc - de + dc \\
\Leftrightarrow \quad ab - abe\overline{c} + de - dc &= h\left(ab\overline{d} - abe\overline{d}\overline{c} + e - c\right) \\
\Leftrightarrow \quad ab - abe\left(2\overline{s}-\overline{a}\right) + \left(2s-b\right)e - \left(2s-b\right)\left(2s-a\right) &= h\left(ab\left(2\overline{s}-\overline{b}\right) - abe\left(2\overline{s}-\overline{b}\right)\left(2\overline{s}-\overline{a}\right) + e - \left(2s-a\right)\right) \\
\Leftrightarrow \quad -4s^2 + 2s\left(a+b+e\right) - 2\overline{s}abe \scriptstyle{- a\overline{a}be + be + ab - ab} &= habe\left(-4\overline{s}^2 + 2\overline{s}\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{e}\right) - 2s\overline{a}\overline{b}\overline{c} \scriptstyle{- ab\overline{b} + a - abe\overline{a}\overline{b} + e}\right) \\
\Leftrightarrow \quad h &= \frac{4s^2 - 2s\left(a+b+e\right) + 2\overline{s}abe}{abe\left(4\overline{s}^2 - 2\overline{s}\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{e}\right) + 2s\overline{a}\overline{b}\overline{e}\right)}.
\end{aligned}
$$

Analog zu obiger Untersuchung finden wir, dass h auf dem Kreis (afd) liegt, wenn $\frac{h-a}{h-d}\cdot\frac{d-f}{a-f}$ reell ist, und weil $d - f = e - b$, erhalten wir die Bedingung $\frac{h-a}{h-d}\cdot\frac{e-b}{a-f} = \frac{\overline{h}-\overline{a}}{\overline{h}-\overline{d}}\cdot\frac{\overline{e}-\overline{b}}{\overline{a}-\overline{f}}$ (**').

Wir erkennen, dass im Vergleich zu (**) die Variablen e gegen a und c gegen f getauscht wurden. Es ist aber $f = 2s - e$ und $c = 2s - a$, d.h. auch hier haben wir nur e gegen a getauscht. Wenn wir also die gleiche Rechnung durchführen, werden auch im Ergebnis für h diese Variablen vertauscht. Da die Formel für h symmetrisch in a,b,e ist, erhalten wir aber das gleiche Ergebnis; das war zu zeigen. Der Nachweis, dass H auch auf dem Kreis BFC liegt, verläuft entsprechend.

Aufgabe 4: Gegeben ist eine reelle Zahl α, in deren Dezimaldarstellung $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ jede Nachkommaziffer a_i (i=1,2,3,...) eine Primzahl ist. Die Nachkommaziffern werden entlang des in nebenstehender Abbildung durch Pfeile angedeuteten, nach rechts und nach unten unendlich fortgesetzt zu denkenden Weges angeordnet. Für jedes $m \geq 1$ wird die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl z_m gebildet, indem vor das Komma die Ziffer 0 und nach dem Komma die von links nach rechts gelesene Ziffernfolge der m-ten Zeile von oben aus nebenstehender Anordnung geschrieben wird. In analoger Weise werden für alle $n \geq 1$ die die reellen Zahlen s_n mit den von oben nach unten zu lesenden Ziffern der n-ten Spalte von links gebildet.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_1 & \rightarrow & a_2 & & a_9 & \rightarrow & a_{10} & & a_{25} & \rightarrow & a_{26} \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
a_4 & \leftarrow & a_3 & & a_8 & & a_{11} & & a_{24} & & a_{27} \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
a_5 & \rightarrow & a_6 & \rightarrow & a_7 & & a_{12} & & a_{23} & & a_{28} \\
 & & & & & & \downarrow & & \uparrow & & \vdots \\
a_{16} & \leftarrow & a_{15} & \leftarrow & a_{14} & \leftarrow & a_{13} & & a_{22} & & \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \\
a_{17} & \rightarrow & a_{18} & \rightarrow & a_{19} & \rightarrow & a_{20} & \rightarrow & a_{21} & &
\end{array}$$

So ist z.B. $z_3 = 0{,}a_5\,a_6\,a_7\,a_{12}\,a_{23}\,a_{28}\ldots$ und $s_2 = 0{,}a_2\,a_3\,a_6\,a_{15}\,a_{18}\,a_{35}\ldots$.

Zeige: a) Wenn α rational ist, dann sind alle z_m und alle s_n rational.
b) Die Umkehrung der in (a) formulierten Aussage ist falsch.

Als bekannt wird vorausgesetzt, dass eine Zahl $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ genau dann rational ist, wenn ihre Dezimaldarstellung endlich oder periodisch ist (mit diesem Begriff fassen wir reinperiodisch und gemischtperiodisch zusammen), d.h. wenn es positive ganze Zahlen N und p gibt, sodass für alle $i \geq N$ die Beziehung $a_{i+p} = a_i$ gilt. Für den Nachweis muss nicht das kleinstmögliche N oder p gefunden werden. Das kleinstmögliche p (es ist immer ein Teiler eines ursprünglich gefundenen p) nennt man dann Länge der Periode. Da keine Ziffern 0 und keine Ziffern 9 erlaubt sind, sind α, z_m und s_n entweder irrational oder periodisch.

Beweis: Der Algorithmus erzeugt eine Tabelle mit den Ziffern a_i der Zahl α. Mit (r,s) bezeichnen wir das Feld in *R*eihe (= Zeile) r und *S*palte s dieser Tabelle; und mit $b(r,s)$ den Index, den die Ziffer von α im Feld (r,s) hat. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$z_m = 0,\ a_{b(m,1)}\,a_{b(m,2)}\,a_{b(m,3)}\,a_{b(m,4)}\,a_{b(m,5)}\,a_{b(m,6)}\ldots \quad \text{und} \quad s_n = 0,\ a_{b(1,n)}\,a_{b(2,n)}\,a_{b(3,n)}\,a_{b(4,n)}\,a_{b(5,n)}\ldots .$$

Zunächst bestimmen wir aus den Variablen r und s mit $s \geq r$ den Index $b(r,s)$, also die $b(r,s)$ derjenigen Felder, die auf oder rechts oberhalb der Hauptdiagonalen liegen. Damit können wir dann alle Indices in der Zeile m ab der Spalte m einfach berechnen.

$b(r,s)$	s: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r: 1	**1**	2	9	10	25	26	49	50	81	82	121
2	4	**3**	8	11	24	27	48	51	80	83	120
3	5	6	**7**	12	23	28	47	52	79	84	119
4	16	15	14	**13**	22	29	46	53	78	85	118
5	17	18	19	20	**21**	30	45	54	77	86	117
6	36	35	34	33	32	**31**	44	55	76	87	116
7	37	38	39	40	41	42	**43**	56	75	88	115
8	64	63	62	61	60	59	58	**57**	74	89	114
9	65	66	67	68	69	70	71	72	**73**	90	113
10	100	99	98	97	96	95	94	93	92	**91**	112
11	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	**111**

Wenn die Ziffernfolge aus dem Innern der Tabelle kommend ein Feld am Rand der Tabelle erreicht, ist ein quadratischer Teil der Tabelle ausgefüllt. Mit dieser Erkenntnis kann man leicht aus der Tabelle ablesen:

$$b(1,s) = \begin{cases} s^2 & \text{falls } s \text{ ungerade} \\ (s-1)^2 + 1 & \text{falls } s \text{ gerade.} \end{cases}$$

Für $s \geq r$ können wir nun $b(r,s)$ berechnen: Folgt man vom Feld $(1,s)$ mit ungeradem s den Feldern gegen die Pfeilrichtung abwärts bis zur Zeile s, so nehmen die Indices jeweils um 1 ab; folgt man vom Feld $(1,s+1)$ mit geradem $s+1$ in Pfeilrichtung abwärts bis zur Zeile $s+1$, so nehmen die Indices in den Feldern jeweils um 1 zu. So erhalten wir

$$b(r,s) = \begin{cases} s^2 - (r-1) & \text{falls } s \text{ ungerade, } s \geq r \\ (s-1)^2 + r & \text{falls } s \text{ gerade, } s \geq r. \end{cases}$$

Analog erhalten wir für $r \geq s$ (also für Felder, die links unterhalb der Diagonalen liegen) die Indices in der Spalte n ab der Zeile n:

$$b(r,1) = \begin{cases} (r-1)^2 + 1 & \text{falls } r \text{ ungerade} \\ r^2 & \text{falls } r \text{ gerade} \end{cases}, \text{ und } b(r,s) = \begin{cases} (r-1)^2 + s & \text{falls } r \text{ ungerade, } r \geq s \\ r^2 - (s-1) & \text{falls } r \text{ gerade, } r \geq s \end{cases}$$

Die Formeln entstehen auseinander, wenn man r und s vertauscht und auch die Bezeichnungen gerade und ungerade. Für $s = r$ führen beide Formeln zum gleichen (interessanten, aber hier nicht benötigten) Ergebnis $b(r,r) = r^2 - r + 1$.

Weiter sind die $b(r,s)$ für $s \geq r$ streng monoton wachsend mit s; für ungerade $s \geq r$ gilt nämlich $b(r,s+1) - b(r,s) = 2r - 1 > 0$; und für gerade $s \geq r$ gilt $b(r,s+1) - b(r,s) = 4s - 2r + 1 > 0$.

zu a) Sei nun α rational. Also ist die Dezimalbruchentwicklung von α periodisch, d.h. gibt es ein N und ein p, sodass für alle $i \geq N$ und alle K stets $a_{i+Kp} = a_i$ gilt.

Nun wählen wir nach Vorgabe eines beliebigen m in Zeile m ein Feld, das eine Ziffer aus dem periodischen Teil von α enthält und gleichzeitig rechts von Spalte m liegt, die Spaltennummer dieses Feldes sei $S = S(m)$. Die Existenz eines solchen Feldes ist gesichert, da − wie oben gezeigt − die Indizes in der Zeile m ab dem Feld $(m|m)$ nach rechts streng monoton wachsend sind. Nach Konstruktion ist $S \geq m$ und $b(m,S) \geq N$. Für solche $b(m,s)$ und $b(m,s+2p)$ gilt nun, dass $s + 2p$ und s beide gerade oder beide ungerade sind, d.h. dass in der folgenden Umformung das letzte Gleichheitszeichen stimmt:

− für alle geraden $s \geq S$:

$$\begin{aligned} b(m,s+2p) &= (s + 2p - 1)^2 + m = s^2 + 4p^2 + 1 + 4sp - 2s - 4p + m \\ &= s^2 - 2s + 1 + m + p(4p + 4s - 4) = (s - 1)^2 + m + 2p(2p + 2s - 2) \\ &= b(m,s) + K_g \cdot 2p \end{aligned}$$

(hierbei ist $K_g = 2p + 2s - 2 \geq 3$, also K_g positiv ganzzahlig,).

− für alle ungerade $s \geq S$:

$$\begin{aligned} b(m,s+2p) &= (s + 2p)^2 - (m - 1) = s^2 + 4sp + 4p^2 - (m - 1) = s^2 - (m - 1) + 2p(2s + 2p) \\ &= b(m,s) + K_u \cdot 2p \end{aligned}$$

(hierbei ist $K_u = 2s + 2p \geq 4$, also K_u positiv ganzzahlig,).

Variante: Man kann hier kürzer formulieren: Es ist $b(m,s) =: P_m(s)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Nach bekanntem Satz ist also $(s + 2p) - (s) = 2p$ ein Teiler von $P_m(s + 2p) - P_m(s)$, also $P_m(s + 2p) = P_m(s) + K \cdot 2p$ für geeignetes K.

Für alle m und alle $s \geq S(m)$ gibt es also ein positives ganzzahliges K, für das $a_{b(m,s+2p)} = a_{[b(m,s) + K \cdot 2p]} = a_{b(m,s)}$ gilt, d.h. die Folge der in Zeile m eingetragenen Ziffern ist (spätestens) ab der Spalte $S(m)$ periodisch mit Periodenlänge $2p$ (oder Teiler davon) und damit auch die Zahl z_m. (Für gerade p sind die z_m und s_n sogar periodisch mit Periodenlänge p oder Teiler von p.)

Der Nachweis, dass dann auch alle s_n periodisch mit einer Periodenlänge $2p$ (oder Teiler davon) sind, verläuft analog, weil man in den Formeln r und s vertauschen kann, wenn man gleichzeitig *gerade* und *ungerade* vertauscht.

zu b) Die Umkehrung der Aussage in Teil a) ist "Wenn alle z_m und alle s_n rational sind, dann auch α".

Um zu zeigen, dass diese Aussage falsch ist, genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden, d.h. eine irrationale Zahl α, bei der alle z_m und s_n rational sind, d.h. deren Ziffernfolgen ab einer bestimmten Stelle periodisch sind. Ein mögliches α mit dieser Eigenschaft zu konstruieren, ist einfach, z.B.:

Wir schreiben in jedes Feld der ersten Zeile die Ziffer 2, ebenso in jedes Feld der ersten Spalte; in alle anderen Felder der Tabelle schreiben wir die Ziffer 3.

Nun besteht die Folge der Ziffern in der Dezimaldarstellung von α aus einer Folge von Ziffern 3, die gelegentlich unterbrochen wird durch eine Kombination von zwei Ziffern 2, d.h. es ist $\alpha = 0{,}22\ 3\ 22\ 333\ 22\ 33333\ 22\ 3\ldots$. Dabei gilt $a_i = 2$ für alle $i = k^2$ und $i = k^2 + 1$ (mit $k = 1, 2, 3, \ldots$), und für alle anderen i gilt $a_i = 3 \neq 2$. Damit stehen zwischen der k−ten und der $(k+1)$−ten Ziffernkombination ...22... genau $2k - 1$ Ziffern 3. Da k beliebig groß wird, ist die Bedingung "$a_i = a_{i+p}$ für alle $i \geq N$" für die Ziffern 2 für kein Paar (p,N) erfüllbar, die Zahl α also irrational.

Dagegen gilt $z_m = s_n = 0{,}2333\ldots = {}^7/_{30}$ für alle $m,n = 1,2,3\ldots$, d.h. alle z_m und alle s_n sind rational.

Bemerkungen: Dass die Abstände der Ziffernkombinationen ...22... immer größer werden, ist auch ohne quantitative Beschreibung, d.h. ohne Verwendung einer Formel möglich. Wenn man auf eine solche quantitative Beschreibung nicht verzichten möchte, kann man einfacher die erste Zeile mit Ziffern 2 vollschreiben und alle anderen Zeilen mit Ziffern 3. Man benötigt dann nur die Formel für $b(1,s)$.

Die Einschränkung möglicher Ziffern auf Primzahlen hat keinen Einfluss auf die Aussage. Der Ausschuss für die Aufgabenauswahl hat aber mit dieser Einschränkung verhindert, dass − je nach Beweisführung − für Zahlen wie z.B. 0,429999... und 0,423000... zusätzliche Überlegungen ausgeführt werden müssen.