



BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

2. Runde 2023

Endgültige Fassung

Ergänzungen sowie Hinweise auf Fehler in diesen Lösungsbeispielen
sind ausdrücklich erwünscht unter
info@bundeswettbewerb-mathematik.de

» KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT

» BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 23. Oktober 2023

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung



STIFTERVERBAND



KULTUSMINISTER
KONFERENZ



Aufgabe 1: Bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $p^6 - 7p^2 + 6$, wobei p alle Primzahlen mit $p \geq 11$ durchläuft.

Antwort: Der größte gemeinsame Teiler ist $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$.

Vorbemerkung zu möglichen Beweisen: Folgende Termumformungen können auf mehrere Arten für Beweise benützt werden:

$$\begin{aligned} f(p) &:= p^6 - 7p^2 + 6 = p^2(p^4 - 7) + 6 \\ &= (p^2 - 1)(p^2 - 2)(p^2 + 3) = (p + 1)(p - 1)(p^2 - 2)(p^2 + 3) \\ &= p^6 - 1 + 7(1 - p^2) \\ &\equiv (p + 1)(p - 1)(p^2 - 9)(p^2 - 4) \pmod{7} \equiv (p + 1)(p - 1)(p + 3)(p - 3)(p + 2)(p - 2) \pmod{7} \end{aligned}$$

Aus diesen Termumformungen können wir einige Aussagen T_i zur Teilbarkeit von Zahlen der Form $f(p)$ durch die Zahl i herleiten, zunächst unabhängig von der Bedingung, dass p Primzahl und $p \geq 11$ ist:

T_3 : $f(p)$ ist für alle ganzzahligen p durch 3 teilbar:

Beweis: Es ist $f(p) = (p^2 - 1)(p^2 - 2)(p^2 + 3)$ für alle p . Offensichtlich ist stets genau einer der Faktoren $(p^2 + 1)$ oder $(p^2 - 1)$ oder $(p^2 + 3)$ durch 3 teilbar und damit auch das Produkt dieser Faktoren. (Dass $p^2 + 1$ nie durch 3 teilbar ist, ist zwar interessant, wird aber hier nicht benötigt.)

T_2 : $f(p)$ ist für alle ganzzahligen ungeraden p durch $8 \cdot 4 = 32 = 2^5$ teilbar:

Beweis: Falls p ungerade ist, ist von den Ausdrücken $(p + 1)$ und $(p - 1)$ einer durch 2 und der andere durch 4 teilbar, d.h. $(p + 1)(p - 1) = p^2 - 1$ ist durch $2 \cdot 4 = 8$ teilbar. Hieraus folgt, dass $p^2 + 3$ durch 4 teilbar ist. Also enthält das Produkt $f(p) = (p^2 - 1) \cdot (p^2 - 2) \cdot (p^2 + 3)$ einen durch 8 teilbaren Faktor und einen zweiten, durch 4 teilbaren Faktor, ist also durch $8 \cdot 4 = 32 = 2^5$ teilbar.

T_7 : $f(p)$ mit ganzzahligem p ist genau dann durch 7 teilbar, wenn p nicht durch 7 teilbar ist:

Beweisvariante 1: Es gilt $f(p) \equiv (p + 1)(p - 1)(p + 3)(p - 3)(p + 2)(p - 2) \pmod{7}$. Offensichtlich hat von diesen sechs Faktoren genau dann genau einer den Wert 0, wenn $7 \mid p$.

Beweisvariante 2: Falls p durch 7 teilbar ist, ist $p = 7p'$ für ein geeignetes ganzzahliges p' . Aus $f(p) = p^6 - 7p^2 + 6 = (7p')^6 - 7p^2 + 6$ kann man sofort ablesen, dass $f(p)$ bei Division durch 7 den Rest 6 lässt, also nicht durch 7 teilbar ist. Und falls p nicht durch 7 teilbar ist, ist $p = 7k + r$ für geeignetes ganzzahliges k und ein $r \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1\}$. Ausmultiplizieren zeigt, dass $p^6 = (7k + r)^6$ und r^6 den gleichen Rest bei Division durch 7 haben. Weil $r \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1\}$, ist $r^6 \in \{729, 64, 1\}$; alle drei Zahlen haben bei Division durch 7 den Rest 1. Also hat $f(p) = p^6 - 7p^2 + 6$ den gleichen Rest wie $1 + 0 + 6 = 7$, d.h. $f(p)$ ist durch 7 teilbar.

Beweisvariante 2: Falls p durch 7 teilbar ist, ist keiner der Faktoren in $f(p) = (p^2 - 1)(p^2 - 2)(p^2 + 3)$ durch 7 teilbar, und, da 7 Primzahl ist, auch $f(p)$ nicht. Und falls p nicht durch 7 teilbar ist, gilt $p^2 \equiv 1 \pmod{7}$ oder $p^2 \equiv 2 \pmod{7}$ oder $p^2 \equiv 4 \pmod{7}$. Damit ist entweder $(p^2 - 1) \equiv 0 \pmod{7}$ oder $(p^2 - 2) \equiv 0 \pmod{7}$ oder $(p^2 + 3) \equiv 0 \pmod{7}$, d.h. in allen Fällen ist $(p^2 - 1) \cdot (p^2 - 2) \cdot (p^2 + 3) \equiv 0 \pmod{7}$, d.h. $f(p)$ ist für alle nicht durch 7 teilbaren Zahlen p durch 7 teilbar.

Beweisvariante 3: Wie man im Kopf schnell nachrechnet, ist $1^3 \equiv 2^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod{7}$. Falls p nicht durch 7 teilbar ist, ist $p^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{7}$ oder $p^2 \equiv (\pm 2)^2 \equiv 4 \pmod{7}$ oder $p^2 \equiv (\pm 3)^2 \equiv 2 \pmod{7}$, also ist $p^6 = (p^2)^3 \equiv 1^3 \equiv 2^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod{7}$ und somit also $f(p) = p^6 - 7p^2 + 6 \equiv 1 - 0 + 6 \equiv 0 \pmod{7}$. Falls $p \equiv 0 \pmod{7}$, ist $f(p) = p^6 - 7p^2 + 6 \equiv 0 - 0 + 6 \equiv -1 \pmod{7}$.

Beweisvariante 4: Wenn p nicht durch 7 teilbar ist, ist $\text{ggT}(p, 7) = 1$. Nach dem kleinen Satz von Fermat ist dann $p^6 = p^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$ und somit $f(p) = p^6 - 7p^2 + 6 \equiv 1 - 0 + 6 \equiv 0 \pmod{7}$.

T_p : $p \mid f(p) \Rightarrow p \mid 6$, d.h. $p \mid f(p) \Rightarrow p \in \{1; 2; 3; 6\}$.

Beweis: Es ist $f(p) = p^2(p^4 - 7) + 2 \cdot 3 \equiv 6 \pmod{p}$.

**Beweis:**

Teil 1: $672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ ist gemeinsamer Teiler aller $f(p)$ mit p Primzahl, $p \geq 11$:

Beweisvariante 1: Ist p Primzahl und $p \geq 11$, so ist insbesondere p ganz, ungerade und nicht durch 7 teilbar. Es folgt also aus T_3 , T_2 und T_7 zusammen mit der Tatsache, dass 2^5 , 3 und 7 paarweise teilerfremd sind, dass $2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$ Teiler aller $f(p)$ mit p Primzahl, $p \geq 11$ ist.

Beweisvariante 2: Ist p Primzahl und $p \geq 11$, so ist insbesondere p ganz, ungerade und nicht durch 7 teilbar, d.h. wir können $p = 2n + 1$ mit $n \geq 5$ und $2n + 1 \neq k \cdot 7$ setzen. Dann ist

$$\begin{aligned} f(p) &= (p^2 - 1)(p^2 + 3)(p^2 - 2) = (4n^2 + 4n)(4n^2 + 4n + 4)(4n^2 + 4n - 1) \\ &= 16 \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + n + 1) \cdot (4n^2 + 4n - 1). \end{aligned}$$

Einer der beiden Faktoren n und $(n+1)$ ist sicher durch 2 teilbar, von den Faktoren n , $(n+1)$ und (n^2+n+1) sicher einer durch 3. Es kann nicht $n \equiv 3 \pmod{7}$ sein, weil aus $11 \leq p = 2n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ folgt, dass p keine Primzahl ist. Ist n ein einer anderen Restklasse mod 7, zeigt einfache Rechnung (hier nicht ausgeführt), dass von den Faktoren n , $(n+1)$, (n^2+n+1) und $(4n^2+4n-1)$ sicher einer durch 7 teilbar ist. Da 2, 3 und 7 paarweise teilerfremd sind, ist $f(p)$ also durch $16 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ teilbar.

Teil 2: Es gibt keinen größeren gemeinsamen Teiler aller $f(p)$ als 672:

Beweisvariante 1: Es genügt zu zeigen, dass es eine Teilmenge der $f(p)$ gibt, für die der größte gemeinsame Teiler den Wert 672 hat. Schon die beiden kleinsten zugelassenen Primzahlen, nämlich $p = 11$ und $p = 13$ führen zum Ergebnis: Es ist

$$\begin{aligned} f(11) &= (11 + 1) \cdot (11 - 1) \cdot (121 - 2) \cdot (121 + 3) = 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 2^2 \cdot 31, \\ f(13) &= (13 + 1) \cdot (13 - 1) \cdot (169 - 2) \cdot (169 + 3) = 2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 167 \cdot 2^2 \cdot 43. \end{aligned}$$

Mit bekannten Regeln zur Bestimmung des ggT folgt $ggT(f(11), f(13)) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$.

Beweisvariante 2: Mit T_p folgt: $p \text{ prim} \wedge p \mid f(p) \Rightarrow p \in \{2; 3\}$. Also ist zu jeder Primzahl $p \geq 11$ die Zahl $f(p)$ eine Zahl, in deren Primfaktorzerlegung diese Primzahl $p \geq 11$ nicht auftaucht, sie taucht also auch nicht in der Primfaktorzerlegung des ggT aller Zahlen $f(p)$ auf. Es können also höchstens Primfaktoren 2, 3, 5 und 7 auftauchen. Da $f(11) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31$, kann dieser ggT höchstens die Faktoren $2^5 \cdot 3 \cdot 7$ enthalten, insbesondere taucht die Primzahl 5 nicht auf. Das war zu zeigen.



Aufgabe 2: Auf einer gebirgigen Insel gibt es 2023 Aussichtspunkte. Es ist bekannt, dass jeder Aussichtspunkt zu mindestens 42 anderen Aussichtspunkten eine Sichtverbindung hat. Für zwei beliebige verschiedene Aussichtspunkte X und Y gibt es stets eine positive ganze Zahl n und Aussichtspunkte A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , so dass $A_1 = X$ und $A_{n+1} = Y$ ist und A_1 mit A_2 , A_2 mit A_3 , ... und A_n mit A_{n+1} hat. Die kleinste solche Zahl n bezeichnen wir als *Sichtabstand* von X und Y .

Bestimme den größten Sichtabstand, den zwei verschiedene Aussichtspunkte unter diesen Bedingungen haben können.

Anmerkungen: Wenn Aussichtspunkt A mit Aussichtspunkt B Sichtverbindung hat, dann auch B mit A .

Antwort: Der gesuchte größtmögliche Sichtabstand ist 140.

Beweis: Die in der Aufgabenstellung beschriebene Menge A_1, A_2, \dots, A_{n+1} mit $A_1 = X$ und $A_{n+1} = Y$ nennen wir eine *zu X, Y gehörende Sichtkette der Länge n* . Für die Suche nach einer Sichtkette kleinster Länge können wir uns auf Sichtketten beschränken, in denen jeder Aussichtspunkt höchstens einmal vorkommt. Da es nur endlich viele Aussichtspunkte gibt, ist die Länge aller Sichtketten endlich und es gibt zu allen möglichen Sichtketten zwischen X und Y eine (evtl. nicht eindeutig bestimmte) kürzeste und damit einen eindeutig definierten Sichtabstand. Unter den endlich vielen Paaren von Aussichtspunkten gibt es dann ein Paar, dessen zugehöriger Sichtabstand den größten Wert unter allen Paaren annimmt.

Gegeben sei ein beliebiges System von Aussichtspunkten, das die Bedingung der Aufgabe erfüllt. Zu jedem Aussichtspunkt X definieren wir Teilmengen $M_i = M_{i,X}$ von Aussichtspunkten als Menge der Aussichtspunkte, die zu X den Sichtabstand i haben, dabei setzen wir $M_0 = \{X\}$. Da der Sichtabstand zwischen zwei Aussichtspunkten stets eindeutig definiert ist, ist jeder Aussichtspunkt in genau einer Menge M_i enthalten. Die M_i bestimmen also eine Zerlegung der Menge der Aussichtspunkte. Da die Menge der Sichtabstände nach oben beschränkt ist, gibt es zu jedem X einen Index $i_{\max}(X)$, sodass $M_i = \emptyset$ für alle $i > i_{\max}(X)$, ferner ist $M_i \neq \emptyset$ für alle $i \leq i_{\max}(X)$.

Zu dem oben gewählten X wählen wir einen Aussichtspunkt $Y \in M_{i_{\max}(X)}$ und eine kürzeste Sichtkette A_1, A_2, \dots, A_{n+1} mit $A_1 = X$, $A_{n+1} = Y$ und $n = i_{\max}(X)$. Offensichtlich ist dann auch jeder Teil dieser Sichtkette A_i, A_{i+1}, \dots, A_j mit $1 \leq i < j \leq n + 1$ eine kürzeste Sichtkette zwischen A_i und A_j , d.h. es ist $A_i \in M_{j-i}$ für alle $i \leq n+1$.

Nun kann ein Aussichtspunkt $V \in M_i$ Sichtverbindungen nur zu Aussichtspunkten W in M_{i-1} , M_i , und M_{i+1} haben: Wäre $W \in M_j$ mit $j \leq i - 2$, dann wäre V nicht in M_i , sondern in M_{j+1} mit $j + 1 < i$, und wäre $W \in M_j$ mit $j \geq i + 2$, dann wäre W nicht in M_j , sondern in M_{i+1} mit $i + 1 < j$. Da $V \in M_i$ ist und insgesamt zu mindestens 42 anderen Aussichtspunkten Sichtverbindung hat und diese nur in M_{i-1} , M_i , und M_{i+1} liegen, ist $|M_{i-1} \cup M_i \cup M_{i+1}| \geq 43$. Da X nur zu Aussichtspunkten von M_1 Sichtverbindung haben kann und Y nur zu Aussichtspunkten aus $M_{i_{\max}(X)}$ und $M_{i_{\max}(X)-1}$ Sichtverbindung haben kann, ist $|M_0 \cup M_1| \geq 43$ und auch $|M_n \cup M_{n+1}| \geq 43$.

Teil 1: Der gesuchte maximale Sichtabstand ist sicher nicht größer als 140:

Variante 1 (Widerspruchsbeweis): Wäre nun der größtmögliche Sichtabstand größer als 140, also M_{141} nicht leer, dann ergibt eine Abschätzung der Gesamtzahl von Aussichtspunkten den Widerspruch

$$\begin{aligned} 2023 &\geq |M_0 \cup M_1| + |M_2 \cup M_{3-1} \cup M_4| + |M_5 \cup M_{3-2} \cup M_7| + \dots + |M_{137} \cup M_{3-46} \cup M_{139}| + |M_{140} \cup M_{141}| \\ &\geq 43 + 46 \cdot 43 + 43 = 43 \cdot 48 = 2064. \end{aligned}$$

Variante 2: Gegeben sei eine kürzeste Sichtkette A_1, A_2, \dots, A_{n+1} zwischen beliebig gewählten A_1 und A_{n+1} . Diese hat die Länge n und besteht aus $n + 1$ Aussichtspunkten. Nun haben A_1 und A_{n+1} jeweils zu genau einem A_i der Aussichtskette eine Sichtverbindung (nämlich zu A_2 bzw. A_n), also auch noch zu mindestens 41 weiteren Aussichtspunkten außerhalb der Sichtkette. Die übrigen A_i ($2 \leq i \leq n$) haben jeweils zu genau zwei der A_i Sichtverbindung (nämlich zu A_{i+1} und A_{i-1}), also auch noch zu mindestens 40 weiteren Aussichtspunkten außerhalb der Sichtkette. Damit gehen von den $n + 1$ Aussichtspunkten A_i der Sichtkette mindestens $40 \cdot (n + 1) + 2$ Sichtverbindungen aus. Andererseits gehen von den $2023 - n - 1 = 2022 - n$ Aussichtspunkten außerhalb der Kette jeweils höchstens drei Sichtverbindungen zu Aussichtspunkten auf der Kette, insgesamt also höchstens $3 \cdot (2022 - n)$. Hieraus erhalten wir die notwendige Bedingung für die ganzzahligen n

$$40 \cdot (n + 1) + 2 \leq 3 \cdot (2022 - n) \Leftrightarrow 43n \leq 6024 \Leftrightarrow n \leq 140.$$



Teil 2: Es gibt ein zulässiges System von Aussichtspunkten, in dem der maximale Sichtabstand 140 ist:

Variante 1: Es genügt nun, passend zur in Teil 1 eingeführten Notation 141 nicht leere Mengen M_i mit insgesamt 2023 Aussichtspunkten ($i = 0, 1, 2, \dots, 140$) zu konstruieren derart, dass in M_i genau die Aussichtspunkte sind, die von dem Element $A_0 \in M_0$ den Sichtabstand i haben. Dies kann z.B. folgendermaßen geschehen:

In M_{3k} und M_{3k+2} mit $k = 0, 1, \dots, 46$ (also in M_i mit $i = 0, 2, 3, 5, \dots, 137, 138, 140$) ist jeweils genau ein Aussichtspunkt,

in M_1 und M_{139} sind jeweils 42 Aussichtspunkte,

in M_{3k+1} mit $k = 1, 2, \dots, 45$ (also in M_i mit $i = 4, 7, \dots, 133, 136$) sind jeweils 41 Aussichtspunkte.

Folgende Sichtverbindungen werden eingerichtet: Für jedes $k = 0, 1, \dots, 46$ habe jeder der Aussichtspunkte in M_{3k+1} Sichtverbindung zu allen anderen 40 bzw. 41 Aussichtspunkten in der gleichen Menge M_{3k+1} , ferner zu dem einen Aussichtspunkt in der "vorhergehenden" Menge M_{3k} und auch zu dem einen Aussichtspunkt in der "nachfolgenden" Menge M_{3k+2} .

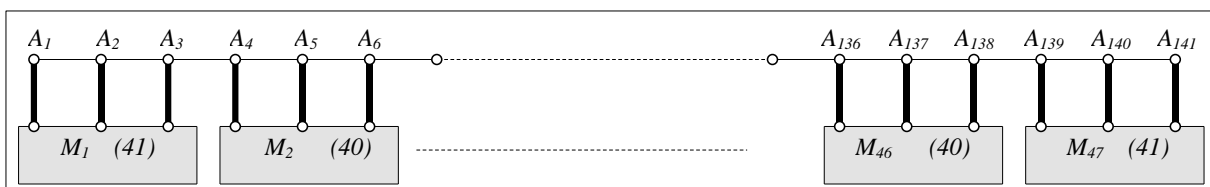
Die M_i mit $i = 0, 1, 2, \dots, 140$ haben nun folgende Eigenschaften: Kein M_i ist leer, die Gesamtzahl der Aussichtspunkte in M_i ist $47 \cdot 2 + 2 \cdot 42 + 45 \cdot 41 = 2023$, jeder Aussichtspunkt hat zu mindestens 42 anderen Aussichtspunkten Sichtverbindungen. Da jeder Aussichtspunkt aus M_i ($1 \leq i \leq 139$) stets zu mindestens einem Aussichtspunkt in M_{i-1} und mindestens einem in M_{i+1} und sonst nur zu weiteren in M_i Sichtverbindung hat, ist nach Konstruktion nun jede Kette von Aussichtspunkten $A_0 \in M_0, A_1 \in M_1, \dots, A_k \in M_k$ bei beliebiger Auswahl der A_i aus M_i eine Sichtkette der Länge k zu A_0 und A_k . Diese Sichtkette ist aber auch eine kürzeste Sichtkette; entsprechendes gilt für jeden zusammenhängenden Teil dieser Kette. Insbesondere gibt es zu beliebigen zwei Aussichtspunkten eine Sichtkette, d.h. die Voraussetzungen der Aufgabe sind erfüllt, und insbesondere ist M_{140} nicht leer, d.h. in M_{140} gibt es einen Aussichtspunkt mit Sichtabstand 140 zu A_0 . Das war zu zeigen.

Variante 2: Zwischen vorgegebenen 2023 Aussichtspunkten konstruieren wir Sichtverbindungen so, dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und der größte Sichtabstand 141 beträgt.

Als erstes wählen wir Aussichtspunkte A_1, \dots, A_{141} und stellen zwischen A_i und A_j genau dann eine Sichtverbindung her, wenn $|i - j| = 1$ (in der Figur durch eine dünne Strecke dargestellt). Damit bilden A_1, \dots, A_{141} eine Sichtkette der Länge 140.

Die restlichen $2023 - 141 = 1882 = 2 \cdot 41 + 45 \cdot 40$ Aussichtspunkte fassen wir in 47 disjunkten Teilmengen M_1, \dots, M_{47} zusammen, nämlich in M_1 und M_{47} je 41 Aussichtspunkte und in M_2, \dots, M_{46} je 40 Aussichtspunkte (vgl. Beschriftung der grauen Kästchen). In jeder Menge M_i verbinden wir jeden Aussichtspunkt mit jedem anderen Aussichtspunkt durch eine Sichtverbindung, zusätzlich jeden Aussichtspunkt in M_k ($1 \leq k \leq 47$) mit A_{3k-2}, A_{3k-1} und A_{3k} (in der Figur dicke Strecken).

Nun sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, denn die Aussichtspunkte $A_2, A_3, A_{139}, A_{140}$ sowie alle in M_1 und M_{47} haben Sichtverbindung zu 43 anderen Aussichtspunkten und alle anderen jeweils zu 42. Offensichtlich gibt es zwischen A_1 und A_2 keine kürzere Sichtkette als A_1, \dots, A_{141} .



Bemerkung: Die Aufgabenstellung versucht, ein rein graphentheoretisches Problem in einen Kontext einzukleiden, der die Begriffe Graph, Knoten, und Kante vermeidet. Erfahrene Teilnehmende haben dies natürlich sofort erkannt und rein graphentheoretisch argumentiert. Ein Fehlen des eigentlich notwendigen Nachweises, dass man tatsächlich eine Insel mit Gebirge, Aussichtspunkten und geradlinigen (!) Sichtverbindungen mit maximalem Sichtabstand 141 konstruieren kann, wurde deswegen nicht als Grund für eine Abwertung genommen.

Google-Suche mit dem weiteren Stichwort „maximum diameter“ führt u.a. zu J.W.Moon, „On the Diameter of a Graph“, Michigan Math. J. 12 (1965) 349-351.



Aufgabe 3: Gegeben ist ein Dreieck ABC mit Inkreismittelpunkt I , die Seitenmitten von AC und BC seien M_b bzw. M_a . Der Schnittpunkt der Geraden M_bI mit der Geraden BC sei B' , der Schnittpunkt der Geraden M_aI mit AC sei A' . Weiter haben die Dreiecke ABC und $A'B'C$ den gleichen Flächeninhalt.

Wie groß kann der Winkel $\angle ACB$ sein?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Ergebnis: Es ist stets $\angle ACB = 60^\circ$.

Vorbemerkungen: In den Beweisen verwenden wir die üblichen Bezeichnungen für die Seitenlängen und Innenwinkel. Punkten, die auf einer Seite liegen, geben wir den zugehörigen Index, z.B. W_b liegt auf Seite AC , M_a liegt auf BC usw. Da die Gerade M_aI außer der Geraden CA auch die Gerade BA schneidet, schreiben wir $A' = A'_b$, für den Schnittpunkt von M_aI mit AB die Bezeichnung A'_c , analog $B' = B'_a$.

Falls $b = c$, ist das Dreieck ABC gleichschenkelig mit Basis BC und Winkelhalbierende und Seitenhalbierende von A sind identisch, also $A' = A$. Dann sind die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und $A'B'C$ genau dann gleich, wenn auch $B = B'$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn $M_bI = M_bB$ ist, d.h. wenn das Dreieck ABC gleichschenkelig mit Basis AC ist. Ein Dreieck, das gleichschenkelig bzgl. zweier Basen ist, ist gleichseitig. Insbesondere gilt dann $\gamma = 60^\circ$. Je nach Beweisansatz muss dieser Fall gesondert betrachtet werden, in den folgenden Beweisen gehen wir hierauf nicht immer ein.

Nach der Dreiecksungleichung sind die Terme $a+b-c$, $a-b+c$ und $-a+b+c$ stets positiv. Terme, die einen der Ausdrücke im Nenner haben, sind also stets definiert. Hierauf werden wir im Folgenden nicht gesondert verweisen.

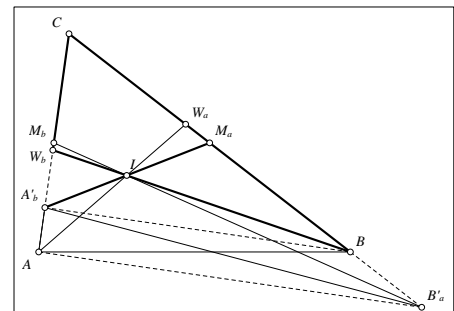
Beweis: Wir verwenden folgenden Hilfssatz (Beweise am Ende):

HS: Im Dreieck ABC mit den üblichen Bezeichnungen seien I der Inkreismittelpunkt I und M_a die Seitenmitte von BC , der Schnittpunkt der Geraden M_aI mit AC sei A'_b . Dann gilt $\overline{CA'_b} = \frac{ab}{a+c-b}$.

Eine analoge Anwendung des HS auf die Seitenmitte M_b von AC und den Schnittpunkt B'_a von M_bI mit CB ergibt (man vertausche a und b usw.) $\overline{CB'_a} = \frac{ab}{b+c-a}$.

Nun haben die Dreiecke ABC und $A'B'C$ den gleichen Innenwinkel γ . Nach bekannter Flächeninhaltsformel sind also ihre Flächeninhalte genau dann gleich, wenn das Produkt der von C ausgehenden Seiten gleich ist. Also gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \overline{CA} \cdot \overline{CB} &= \overline{CA'_b} \cdot \overline{CB'_a} \\ \Leftrightarrow ab &= \frac{ab}{a+c-b} \cdot \frac{ab}{b+c-a} & \Leftrightarrow ab &= (a+c-b) \cdot (b+c-a) \\ \Leftrightarrow ab &= (c+(a-b)) \cdot (c-(a-b)) & \Leftrightarrow ab &= c^2 - (a-b)^2 \\ \Leftrightarrow c^2 &= a^2 + b^2 - ab. \end{aligned}$$



Nach Cosinus-Satz gilt aber in jedem Dreieck auch $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$. Der Vergleich beider Terme liefert sofort die äquivalente Bedingung $ab = 2ab\cos(\gamma)$ und somit $\cos(\gamma) = 1/2$, also $\gamma = 60^\circ$.

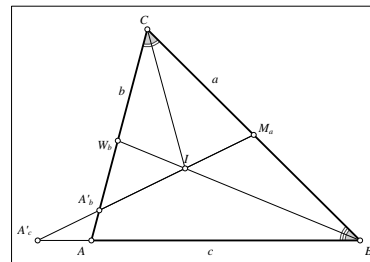
Im Folgenden geben wir verschiedene Beweise dieses HS:



1. Beweis des HS: Sei W_b der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden BI mit AC .

Da M_a und C beide außerhalb von Dreieck ABW_b und in der gleichen Halbebene bzgl. W_bB liegen, und I im Innern der Seite BW_b liegt, verläuft die Strecke IA'_b im Innern von Dreieck ABW_b . W_b liegt also stets zwischen A'_b und C , es ist also stets

$$\overline{CA'_b} = \overline{CW_b} + \overline{W_bA'_b} \quad (1).$$



Die Gerade BW_b ist Winkelhalbierende im Dreieck ABC , also gilt $\overline{CW_b} = b \frac{a}{a+c}$, und zusammen mit der Tatsache, dass die Gerade CI Winkelhalbierende im Dreieck CW_bB ist, folgt

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{IW_b}} = \frac{a}{\overline{CW_b}} = \frac{a}{\frac{ab}{a+c}} = \frac{a+c}{b}. \quad (2).$$

Nach Satz von Menelaos im Dreieck CW_bB mit Gerade $M_aA'_b$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\overline{CM_a}}{\overline{M_aB}} \cdot \frac{\overline{BI}}{\overline{IW_b}} \cdot \frac{\overline{W_bA'_b}}{\overline{A'_bC}} = \frac{a+c}{b} \cdot \frac{\overline{W_bA'_b}}{\overline{A'_bC}} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{a+c}{b} \cdot \frac{\overline{CA'_b} - \overline{CW_b}}{\overline{CA'_b}} = \frac{a+c}{b} \cdot \frac{\overline{CA'_b} - \frac{ab}{a+c}}{\overline{CA'_b}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für $\overline{CA'_b}$, Auflösen ergibt $\overline{CA'_b} \cdot \left(\frac{b}{a+c} - 1\right) = -\frac{ab}{a+c}$, also

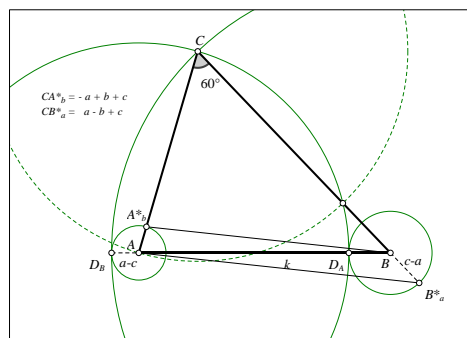
$$\overline{CA'_b} = \frac{ab}{a+c} : \left(1 - \frac{b}{a+c}\right) = \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{a+c}{a+c-b} = \frac{ab}{a+c-b}.$$

Es sei noch bemerkt, dass in der Argumentation nicht berücksichtigt werden muss, ob A'_b zwischen A und C liegt oder A zwischen A'_b und C .

Bemerkung: In nebenstehender Figur bestimmen die Kreise (A, r) und (B, a) die Punkte D_A und D_B auf AB . Konstruiert man hieraus Punkte A^*_b und B^*_a wie in der nebenstehenden Figur vorgegeben, so erhält man $\overline{CA^*_b} = b + c - a$ und $\overline{CB^*_a} = b + c - a$, also ebenfalls

$$\begin{aligned} |ABC| &= |A^*_bB^*_aC| \Leftrightarrow ab = (b+c-a)(a+c-b) \\ &\Leftrightarrow \gamma = 60^\circ. \end{aligned}$$

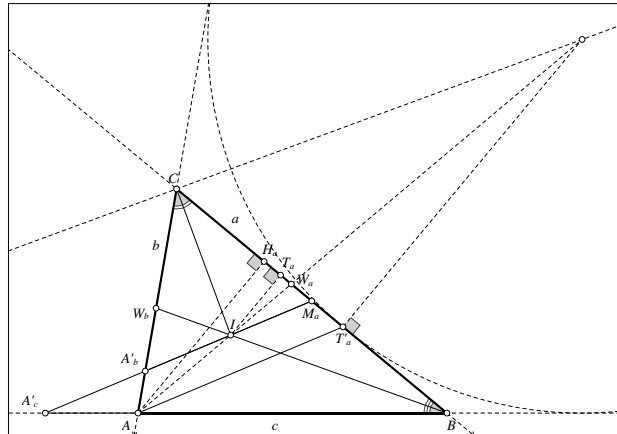
Kontrolle mit einem DGS lässt vermuten, dass $A^*_b = A'_b$ und $B^*_a = B'_a$ genau dann gilt, wenn $\gamma = 60^\circ$.





2. Beweis des HS: Wir betrachten fünf wichtige Punkte auf der Seite bzw. Geraden BC : Den Höhenfußpunkt H_a der Höhe von A , den Berührungspunkt T_a des Inkreises (gleichzeitig der Lotfußpunkt des Lotes von I), den Schnittpunkt W_a mit der Winkelhalbierenden w_a , den Mittelpunkt M_a und den Berührungspunkt T'_a des Ankreises an BC .

Wenn das Dreieck ABC gleichschenkelig mit Basis BC ist, fallen diese Punkte zusammen, sonst liegen sie in dieser oder in umgekehrter Reihenfolge auf BC , je nachdem $b < a$ oder $b > a$ ist. Der Punkt H_a liegt genau dann innerhalb der Strecke BC , wenn $\gamma < 90^\circ$ und auch $\beta < 90^\circ$, alle anderen Punkte liegen stets innerhalb von BC .



Die relative Lage zueinander können wir mit a, b und c ausdrücken und damit zeigen, dass $AT'_a \parallel M_aA'_b$, und mit Hilfe dieser Beziehung, dass $\overline{CA'_b} = \frac{ab}{a+c-b}$ und analog $\overline{CB'_a} = \frac{ab}{a+b-c}$.

Die Figur stellt die Situation für $a > b$ dar. Falls $a < b$ gelten dann die Überlegungen ebenfalls, da dann die Punkte H_a, T_a, W_a, M_a , und T'_a in umgekehrter Reihenfolge auf BC liegen.

Bekanntlich haben die Tangentenabschnitte auf CB an den Inkreis von der Ecke C und die Tangentenabschnitte an den Ankreis von B die gleiche Länge, nämlich $\frac{1}{2}(a+b-c)$, damit gilt

$$\overline{M_aT_a} = \overline{M_aT'_a} = \overline{M_aC} - \overline{CT_a} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{1}{2}(c-b).$$

Weil $a > b$, ist $\beta < \alpha$ und damit $\beta < 90^\circ$. Für $\overline{H_aB} = c \cos \beta = c \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ erhalten wir also einen positiven Wert, es gilt also

$$\begin{aligned} \overline{H_aT'_a} &= \overline{H_aB} - \overline{BT'_a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{a^2 + (c+b)(c-b)}{2a} - \frac{a^2 + a(b-c)}{2a} \\ &= \frac{(c-b) \cdot (a+b+c)}{2a} = \overline{M_aT_a} \cdot \frac{h_a}{r}. \end{aligned}$$

Unter der Verwendung der Flächeninhaltsformeln $2|ABC| = r \cdot (a+b+c) = a \cdot h_a$ schließen wir hieraus

$$\frac{\overline{H_aT'_a}}{\overline{M_aT_a}} = \frac{\overline{AH_a}}{\overline{IT_a}}.$$

Nun stimmen die Dreiecke T_aIM_a und $H_aAT'_a$ überein im Verhältnis der von T_a bzw. H_a ausgehenden Seiten sowie dem rechten Winkel bei T_a bzw. H_a . Sie sind also ähnlich, insbesondere sind die Winkel bei M_a und T'_a gleich. Hieraus folgt – zusammen mit der Tatsache, dass A'_b auf M_aI liegt – dass $M_aA'_b \parallel T'_aA$. Mit Strahlensatz mit Zentrum C folgt

$$\frac{\overline{CA'_b}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CM_a}}{\overline{CT'_a}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(c-b)} = \frac{a}{a+c-b}, \text{ also } \overline{CA'_b} = \frac{ab}{a+c-b}; \text{ analog } \overline{CB'_a} = \frac{ab}{b+c-a}.$$

Bemerkung: Die Berechnung der Streckenlängen zwischen diesen Punkten war auch Thema bei der Aufgabe *bwm 2019 ii 3*.



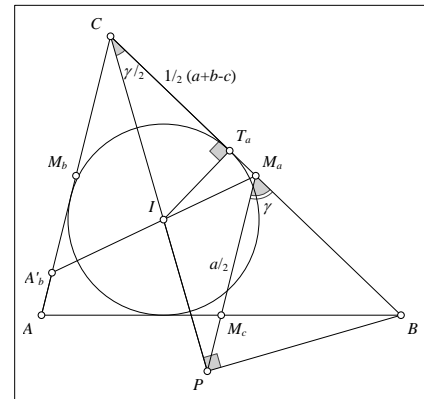
3. Beweis des HS (mit Strahlensatz): Sei T_a der Berührungspunkt des Inkreises von Dreieck ABC mit der Seite BC und P der Schnittpunkt von CI mit M_aM_c .

Nun ist $AC \parallel M_aM_c$, also folgt mit Strahlensatz mit Zentrum I , dass

$$\overline{CA'_b} = \overline{M_aP} \cdot \frac{\overline{CI}}{\overline{IP}} = \overline{M_aP} \cdot \overline{CI} \cdot \frac{1}{\overline{CP} - \overline{CI}}.$$

Da CI den Winkel $\angle ACB$ halbiert und $AC \parallel M_aM_c$ gilt, ist $\angle M_aPC = \angle ACP = \angle PCM_a$, d.h. das Dreieck PM_aC ist gleichschenkelig und somit

$$\overline{M_aP} = \overline{M_aC} = \overline{M_aB} = a/2.$$



Damit ist der Thaleskreis über der Strecke BC gleichzeitig Umkreis des Dreiecks PBC , d.h. es gilt $\angle BPC = 90^\circ$. Weiter folgt aus der Definition von T_a , dass auch $\angle CT_aI = 90^\circ$. Also sind die Dreiecke IT_aC

und BPC beide rechtwinklig mit gleichem Winkel $\gamma/2$ bei C , woraus wir $\cos \gamma/2 = \frac{\overline{CT_a}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}}$ ablesen.

Unter Verwendung von $\overline{CT_a} = 1/2(a+b-c)$ und $\overline{CB} = a$ ergibt sich

$$\overline{CP} = a \cos \frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad \overline{CI} = \frac{(a+b-c)}{2 \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Dies setzen wir nun zusammen und erhalten unter Verwendung von $2 \cdot \cos^2(\gamma/2) = 1 + \cos \gamma$:

$$\begin{aligned} \overline{CA'_b} &= \overline{M_aP} \cdot \overline{CI} \cdot \frac{1}{\overline{CP} - \overline{CI}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{1}{a \cos \frac{\gamma}{2} - \frac{a+b-c}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}} \\ &= \frac{a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2a \cos^2 \frac{\gamma}{2} - (a+b-c)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b-c}{(1+\cos \gamma) - \frac{(a+b-c)}{a}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b-c}{\left(\frac{2ab}{2ab} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) - \frac{2b(a+b-c)}{2ab}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2ab(a+b-c)}{2ab + a^2 + b^2 - c^2 - 2ab - 2b^2 + 2bc} \\ &= \frac{ab(a+b-c)}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{a^2 - (b-c)^2} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+(b-c))(a-(b-c))} \\ &= \frac{ab}{(a+c-b)}. \end{aligned}$$

4. Beweis des HS (Charakterisierung des Inkreismittelpunktes des Dreiecks ABC relativ zum Mittendreieck): Wir verwenden folgende Hilfssätze, die wir am Ende beweisen:

HS 1: Das Dreieck ABC und sein Mittendreieck $M_aM_bM_c$ haben den gleichen Schwerpunkt S , und die zentrische Streckung ($S; -1/2$) bildet das Dreieck ABC auf sein Mittendreieck $M_aM_bM_c$ ab und ($S; -2$) bildet das Mittendreieck zurück auf das Dreieck ABC ab. Insbesondere werden dabei Ankreise und deren Berührungspunkte des Mittendreiecks auf solche des Dreiecks ABC abgebildet.

HS 2: Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist der NAGEL-Punkt des Mittendreiecks $M_aM_bM_c$, d.h. der Schnittpunkt der Verbindungslinien zwischen Ecke und Berührungspunkt des gegenüberliegenden Ankreises auf der gegenüberliegenden Seite. Insbesondere wird bei der zentrischen Streckung ($S; -2$) der Nagelpunkt des Mittendreiecks (also der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC) auf den Nagelpunkt des Dreiecks ABC abgebildet.



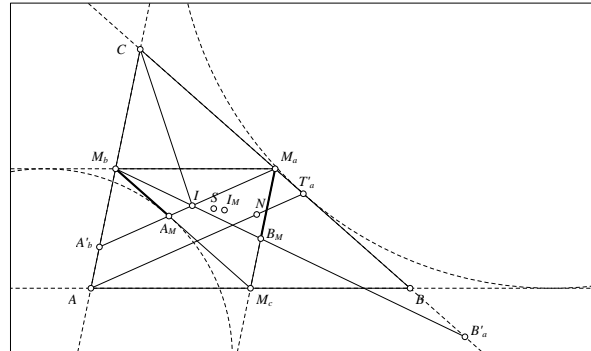
Dies verwenden wir folgendermaßen: Sei A_M der Schnittpunkt der Strecke M_bM_c mit der Geraden $M_aI = M_aA'_b$. Dann sind mit den Bezeichnungen des 2. Beweises die Geraden M_aI und M_aA_M identisch; ihr Bild bei der zentrischen Streckung $(S, -2)$ ist die Gerade $AN = AT'_a$. Da bei einer zentrischen Streckung Gerade und Bildgerade parallel sind, gilt $AT'_a \parallel M_aI$ und A'_b teilt CA im gleichen Verhältnis wie M_a die Strecke CT'_a . Der Rest folgt wie im 2. Beweis.

Beweise der Hilfssätze: HS 1 ist hinlänglich bekannt. Einen Beweis für HS 2 findet man (nicht nur) bei HONSBERGER (vgl. Bemerkung unten). Hier ein Beweis, der nahe an den Voraussetzungen der Aufgabe ist: Da der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC stets im Innern des Mittendreiecks liegt, bestimmen die drei Geraden M_cI , M_bI und M_aI drei Ceva-Transversalen, die den gemeinsamen Punkt I haben und auf den Seiten des Mittendreiecks die Teilpunkte C_M , B_M und A_M bestimmen (C_M ist in der Zeichnung nicht eingetragen).

Weil CI auch Winkelhalbierende im Dreieck A'_bCM_a ist, gilt nach Strahlensatz mit

$$\text{Zentrum } I: \frac{\overline{M_aB_M}}{\overline{A'_bM_b}} = \frac{\overline{M_aI}}{\overline{IA'_b}} = \frac{\overline{CM_a}}{\overline{A'_bC}},$$

$$\text{Zentrum } A'_b: \frac{\overline{M_bA_M}}{\overline{A'_bM_b}} = \frac{\overline{CM_a}}{\overline{A'_bC}}.$$



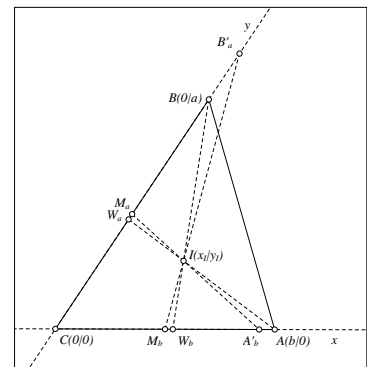
Der Vergleich ergibt sofort, dass $\overline{M_bA_M} = \overline{M_aB_M}$.

Analog erhalten wir auch $\overline{M_cB_M} = \overline{M_bC_M}$ und

$\overline{M_aC_M} = \overline{M_cA_M}$. Mit den üblichen Berechnungen mit den Tangentenabschnitten der Ankreise an ein Dreieck leiten wir her, dass die Teilpunkte A_M , B_M und C_M identisch mit den Berührungspunkten der Ankreise des Mittendreiecks sind.

Bemerkung: Da I der NAGEL-Punkt im Mittendreieck und gleichzeitig Inkreismittelpunkt im Dreieck ABC ist, führt die zentrische Streckung $(S, -2)$ den Punkt I auf den NAGEL-Punkt N des Dreiecks ABC und die Streckung $(S, -1/2)$ auf den Inkreismittelpunkt I_M des Mittendreiecks (= SPIEKER-Punkt). Also sind die Punkte I , S , I_M und N kollinear und I_M der Mittelpunkt der Strecke IN , vgl. auch HONSBERGER, ROSS, Episodes in nineteenth and twentieth Century Euclidean Geometry, ISBN 0-883585-639-5 p.12. Nicht nur Mathworld verwendet den Begriff NAGEL-Gerade (<https://mathworld.wolfram.com/NagelLine.html>). Man beachte die Analogie zur Eulergrade, die auch durch S geht und auf der Umkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt des Feuerbachkreises in entsprechenden Abständen liegen.

5. Beweis des HS (Koordinatenrechnung im affinen Achsenkreuz): Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden von den Ecken A , B und C mit den gegenüberliegenden Seiten seien mit W_a bzw. W_b bzw. W_c bezeichnet. Wir legen ein affines (d.h. nicht notwendigerweise rechtwinkliges) Achsenkreuz über das Dreieck ABC mit Ursprung auf C , $[CA]$ als positive x -Achse und $[CB]$ als positive y -Achse. Die Koordinaten der beteiligten Punkte sind dann $C(0|0)$, $A(b|0)$, $B(a|0)$, also $M_a(0|a/2)$, $M_b(b/2|0)$. Schulmäßige Rechnung mit Geradengleichungen zeigt nun, dass A'_b wie gewünscht die Koordinaten



$A'_b\left(\frac{a}{a+c-b} \mid 0\right)$ hat. Konkret:

Bekanntlich ist für gegebene u, v mit $uv \neq 0$ die Menge der Punkte $(x|y)$, für die die Gleichung $vx + uy = uv$ erfüllt ist, eine Gerade, die die Achsen in den Punkten $U(u|0)$ und $V(0|v)$ schneidet.

Da W_a und W_b die Seite CB bzw. CA im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, haben W_a und W_b die Koordinaten $W_a\left(0 \mid \frac{b}{b+c} \cdot a\right)$ und $W_b\left(\frac{a}{a+c} \cdot b \mid 0\right)$. Die zu den Geraden $AI = AW_a$ und $BI = BW_b$ gehörenden



Gleichungen sind also die Gleichungen $\frac{ab}{b+c}x + by = \frac{ab}{b+c} \cdot b$ und $ax + \frac{ab}{a+c}y = \frac{ab}{b+c} \cdot a$ was wir äquivalent umformen zu

$$ax + (b+c)y = ab \quad (1)$$

$$(a+c)x + by = ab \quad (2)$$

Die beiden Geraden schneiden sich im Inkreismittelpunkt $I(x_I|y_I)$. Man überzeugt sich leicht, dass die Koordinaten $(x_I|y_I) = \left(\frac{ab}{a+b+c} \mid \frac{ab}{a+b+c}\right)$ die Lösung dieses Gleichungssystems sind.

Der Punkt A'_b habe die Koordinaten $(r|0)$, zur Geraden $M_a I = M_a A'_b$ gehört dann die Gleichung $\frac{a}{2}x + ry = \frac{a}{2}r$. Da der Punkt I auf dieser Geraden liegt, müssen seine Koordinaten diese Gleichung erfüllen. Weil zusätzlich $x_I = y_I$ es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{a}{2}x_I + r y_I &= \frac{a}{2}r \Leftrightarrow a \frac{ab}{a+b+c} + 2r \frac{ab}{a+b+c} = ar \Leftrightarrow ab + 2rb = r(a+b+c) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{ab}{(a+c-b)}. \end{aligned}$$

6. Beweis (ohne direkte Verwendung des HS, wir setzen Grundkenntnisse über baryzentrische Koordinaten voraus): Wir wählen das Dreieck ABC als Referenzdreieck. Die baryzentrischen Koordinaten der gegebenen Punkte sind dann $A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$, $C(0:0:1)$, $I(a:b:c)$, $M_a(0:1:1)$, $M_b(1:0:1)$. Die Punkte A' und B' liegen auf den Geraden CA bzw. CB , also gibt es reelle x und y , für die $A'(x : 0 : 1-x)$, $B'(0 : y : 1-y)$. Dann gilt $\overline{CA'} = x \cdot \overline{CA} = bx$ und $\overline{CB'} = y \cdot \overline{CB} = ay$.

Nun sind drei Punkte genau dann kollinear, wenn die Determinante der zugehörigen Matrix aus den Koordinaten der drei Punkte den Wert Null hat. Also ist A' genau dann Schnittpunkt von AC mit $M_a I$; wenn

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1-x \end{vmatrix} = a(1-x) + bx - cx = x(-a+b-c) + a \Leftrightarrow x = \frac{a}{a-b+c}.$$

Analog (man vertausche a und b , x und y): $y = \frac{b}{-a+b+c}$.

Mit bekannter Flächeninhaltsformel für Dreiecke gilt nun mit $absin\gamma \neq 0$

$$|ABC| = |A'B'C| \Leftrightarrow absin\gamma = aybxsin\gamma \Leftrightarrow xy = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a-b+c} \cdot \frac{b}{-a+b+c} = 1 \Leftrightarrow (a-b+c) \cdot (-a+b+c) = ab \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

Nach Cosinus-Satz gilt aber in jedem Dreieck auch $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$. Der Vergleich beider Terme liefert sofort die äquivalente Bedingung $ab = 2ab\cos(\gamma)$; und da $ab \neq 0$ weiter $\cos(\gamma) = 1/2$, also $\gamma = 60^\circ$.



Aufgabe 4: Von den Verbindungsstrecken zwischen den Ecken eines regulären $2n$ -Ecks (also den Seiten und Diagonalen) sollen genau n Strecken rot gefärbt werden, wobei folgende Regeln eingehalten werden müssen:

- 1) die Endpunkte der rot gefärbten Strecken sind genau die $2n$ Ecken,
- 2) keine zwei rot gefärbten Strecken haben gleiche Länge.

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist dies möglich?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Eine solche Färbung ist möglich $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv 1 \pmod{4}$.

1. Beweis für " \Rightarrow " (Paritätsbetrachtung): Die Ecken des $2n$ -Ecks seien im Uhrzeigersinn fortlaufend mit E_1, E_2, \dots, E_{2n} bezeichnet.

Wir definieren das *Entfernungsmaß* $d(E_i, E_j) = d(i, j)$ zweier Eckpunkte E_i und E_j als Anzahl der Seiten des $2n$ -Ecks, die auf dem kürzesten Weg entlang der Seiten des $2n$ -Ecks liegen. Gleichzeitig sei $d(i, j)$ das *Längenmaß der Verbindungsstrecke* $E_i E_j$. Diese Maße nehmen einen der Werte aus $\{1, 2, \dots, n\}$ an, jeder dieser Werte wird auch tatsächlich angenommen.

Es gilt offensichtlich $\overline{E_i E_j} > \overline{E_r E_s} \Leftrightarrow d(i, j) > d(r, s)$. d.h. die Ordnungen der Strecken nach euklidischer Länge und nach so definiertem Entfernungsmaß sind identisch. Die Forderung, dass keine zwei rot gefärbten Strecken gleiche Länge haben, können wir also ersetzen durch die Forderung, dass keine zwei rot gefärbten Strecken gleiches Entfernungsmaß haben.

Interessant, aber für unsere Argumentation unnötig ist die konkrete Berechnung $d(E_i, E_j) := d(i, j) = \min(|j - i|, 2n - |j - i|)$. Diese Formel kann allerdings als zusätzliche Bestätigung für die folgende Aussage bzgl. der Parität dienen.

Wir nennen nun ein Paar von Indices (i, j) und auch die zugehörige Verbindungsstrecke $E_i E_j$ *gerade* bzw. *ungerade*, wenn die ganze Zahl $d(i, j)$ gerade bzw. ungerade ist. Da $2n$ stets gerade ist, sind (i, j) und $E_i E_j$ gerade, wenn i und j gleiche Parität haben (also beide gerade oder beide ungerade sind) und ungerade, wenn i und j verschiedene Parität haben.

Sei nun für ein bestimmtes n eine zulässige Färbung gegeben. Wir wischen alle nicht gefärbten Strecken weg und verkürzen "rot gefärbte Strecken" zu "Strecken" und "Entfernungsmaßzahl" zu „Länge“.

Es gibt genau n Strecken, jede hat genau zwei Endpunkte und es gibt genau $2n$ mögliche Endpunkte, also ist jede Ecke Endpunkt von genau einer Strecke. Da keine zwei Strecken gleiche Länge haben und es n mögliche Längen gibt, kommt jede Länge $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ genau einmal vor. Jeder Länge k können wir somit eindeutig die Strecke der Länge k zuordnen, ebenso das zugehörige Paar der Indices $(a(k), b(k))$ der zugehörigen Endpunkte, zur Wahrung der Eindeutigkeit fordern wir $a(k) < b(k)$. Unter den $a(k)$ und $b(k)$ kommt jede der Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ genau einmal vor.

Ist nun n gerade, so gibt es genau $n/2$ ungerade Strecken und genau $n/2$ gerade Strecken, d.h. durch die Färbung werden die Indices der Endpunkte die Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ zu $n/2$ geraden Paaren und zu $n/2$ ungeraden Paaren zusammengefasst. Ist dagegen n ungerade, so erhält man $(n+1)/2$ ungerade und $(n-1)/2$ gerade Paare.

Unter den Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ kommen gleich viele gerade und ungerade Zahlen vor, in der Menge der ungeraden Paare auch. Damit kommen auch in der Menge der geraden Paare gleich viele gerade wie ungerade Zahlen vor.

Da unter den ungeraden Paaren bei geradem n genau $2 \cdot n/2 = n$ Zahlen vorkommen und bei ungeradem n genau $2 \cdot (n+1)/2 = n+1$ Zahlen, bleiben für die geraden Paare n bzw. $n-1$ Zahlen.

Jedes gerade Paar besteht entweder aus zwei geraden Zahlen oder zwei ungeraden Zahlen. Da es unter den restlichen Zahlen gleich viele gerade wie ungerade Zahlen gibt, kann man die restlichen n bzw. $n-1$ Zahlen stets zu Vierergruppen zweier gerader und zweier ungerader Zahlen zusammenfassen. Also muss n bzw. $n-1$ durch 4 teilbar sein. Anders ausgedrückt: Es ist $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv 1 \pmod{4}$.



2. Beweis für " \Rightarrow " (Paritätsbetrachtung): Wir gehen von einer regelgerechten Färbung der Sehnen aus. Als Maß für die Länge einer Sehne verwenden wir wieder die kleinste Anzahl der Seiten des $2n$ -Ecks zwischen den Endpunkten der Sehnen. Nach den Vorüberlegungen gilt: Summe der Längenmaße aller gefärbten Seiten $=: S(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Wir wählen zwei benachbarte Ecken E_j und E_{j+1} , die nicht Endpunkte der gleichen Sehne E_rE_j und E_sE_{j+1} sind (also $r \neq s$, wie üblich sei $E_{2n} = E_0$), und ersetzen in $S(n)$ die Längenmaße dieser Sehnen durch die Längenmaße von E_sE_j und E_rE_{j+1} . Diese sind jeweils entweder um 1 größer oder um 1 kleiner als E_rE_j bzw. E_sE_{j+1} , d.h. für die neue Summe aller Längenmaße $S(n)'$ gilt nun $S(n)' = S(n) + 2$ oder $S(n)' = S(n)$ oder $S(n)' = S(n) - 2$, in jedem Fall gilt $S(n)' \equiv S(n) \pmod{2}$.

Dies wiederholen wir so lange geeignet, bis wir nur noch Strecken mit Längenmaß 1 haben, offensichtlich ist dies immer möglich. Dann hat die Summe aller Sehnenlängen den Wert n , d.h. es muss $n \equiv \frac{1}{2}n(n+1) \pmod{2}$ gelten. Ausprobieren mit $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ zeigt, dass dann notwendigerweise $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv 1 \pmod{4}$.

Variante: (letztlich gleiche Idee wie im 1. Beweis): Wir bezeichnen die Ecken des $2n$ -Ecks fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn mit $E_0, E_1, \dots, E_{2n-1}$. Jede Strecke E_iE_j mit $0 \leq i, j \leq 2n-1$ kann durch eine Drehung um das Zentrum des $2n$ -Ecks in die Strecke E_0E_r mit $1 \leq r \leq n$ überführt werden (die Strecken E_0E_n und E_nE_0 gehen dabei in sich selbst über), dabei ist $d = d(i,j)$ eindeutig bestimmt und es gilt $|E_iE_j| > |E_sE_t| \Leftrightarrow d(i,j) > d(s,t)$. Als Maß für die Länge der Strecke E_iE_j können wir also $d(E_iE_j) := d(i,j) = \min(|j-i|, 2n-|j-i|)$ definieren. Später werden wir benützen, dass – weil $2n$ stets gerade ist – stets auch $d(i,j) \equiv i-j \equiv i+j \pmod{2}$ ist. Die Menge der Längenmaße aller möglichen Verbindungsstrecken ist dann $\{1, 2, \dots, n\}$.

Sei nun für ein bestimmtes n eine zulässige Färbung gegeben. Wir wischen alle nicht gefärbten Strecken weg und verkürzen ab sofort "rot gefärbte Strecken" zu "Strecken" und "Längenmaßzahl" zu Länge.

Es gibt genau n Strecken und es gibt genau $2n$ mögliche Endpunkte, also ist jede Ecke Endpunkt von genau einer Strecke. Da keine zwei Strecken die gleiche Länge haben und es n mögliche Streckenlängen gibt, kommt unter den Strecken jede Streckenlänge aus $\{1, 2, \dots, n\}$ genau einmal vor. Damit kann man jeder Strecke der Länge k die Indices $a(k)$ und $b(k)$ mit $a(k) < b(k)$ ihrer beiden Endpunkte eindeutig zuordnen. Wenn k die Längen $1, \dots, n$ durchläuft, dann kommt unter den $a(k)$ und $b(k)$ jeder Index $0, 1, \dots, 2n$ genau einmal vor. Also gilt

$$\sum_{k=1}^n a(k) + b(k) = 0 + 1 + \dots + 2n - 1 = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1). \quad (*)$$

Nun überlegen wir, welche der Strecken gerade bzw. ungerade Längenmaßzahlen haben. Da die Eckenzahl $2n$ gerade ist, ist $d(E_iE_j)$ genau dann gerade, wenn i und j gleiche Parität haben. Also gilt

$$d(E_{a(k)}E_{b(k)}) = \min(|b(k) - a(k)|, 2n - |b(k) - a(k)|) \equiv a(k) + b(k) \pmod{2}$$

zusammen mit (*) erhalten wir dann für n die notwendige Bedingung

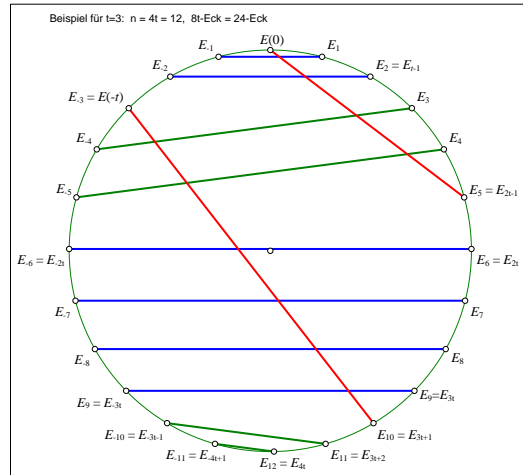
$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= 1 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \min(|b(k) - a(k)|, 2n - |b(k) - a(k)|) \\ &\equiv \sum_{k=1}^n a(k) + b(k) \equiv n(2n-1) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Diese Kongruenz ist genau dann erfüllt, wenn $n \equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \equiv 1 \pmod{4}$; das war zu zeigen.



1. Beweis für " \Leftarrow " (konkrete Angabe einer zulässigen Färbung):

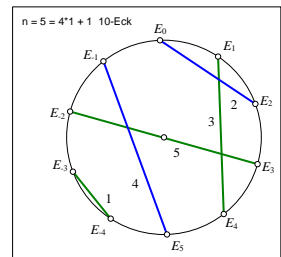
Fall 1: $n = 4t, t \geq 1$: In dem $8 \cdot t$ -Eck nummerieren wir die Ecken von $-4t + 1$ bis $4t$ im Uhrzeigersinn durch. Nun müssen wir $2t$ gerade Verbindungsstrecken und $2t$ ungerade Verbindungsstrecken rot färben (jede verwendete Farbe ist im Sinne der Aufgabenstellung rot). Anhand der Figur und der Tabelle – sortiert nach Indices der Anfangspunkte – kann die Existenz der zulässigen Färbung leicht überprüft werden (für $t = 1$ werden in der 2., 4. und 6. Zeile leere Mengen von Strecken beschrieben):



Zählindex	Anz.	Strecken	Art	Längen
$i = 0$	1	$(0, 2t - 1)$	ungerade	$2t - 1$
$1 \leq i \leq t - 1$	$t - 1$	$(-i, i)$	gerade	$2, 4, \dots, 2t - 2$
$i = t$	1	$(-t, 3t + 1)$	ungerade	$4t - 1$
$t + 1 \leq i \leq 2t - 1$	$t - 1$	$(-i, i - 1)$	ungerade	$2t + 1, 2t + 3, \dots, 4t - 3$
$2t \leq i \leq 3t$	$t + 1$	$(-i, i)$	gerade	$2t, 2t + 2, \dots, 4t$
$3t + 1 \leq i \leq 4t - 1$	$t - 1$	$(-i, i + 1)$	ungerade	$1, 3, \dots, 2t - 3$

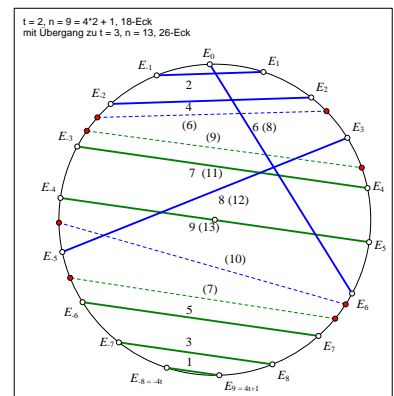
Fall 2: $n = 4t + 1, t \geq 1$: In dem $8 \cdot (t + 2)$ -Eck nummerieren wir die Ecken von $-4t$ bis $4t + 1$ im Uhrzeigersinn durch. Nun färben wir $2t + 1$ ungerade Verbindungsstrecken und $2t$ gerade Verbindungsstrecken nach folgendem Algorithmus:

Für $t = 1$, also $n = 5$ und dem 10-Eck gibt nebenstehende Figur eine konkrete Färbung an.



Für $t = 2$, also $n = 9$ und dem 18-Eck kann man aus unten stehender Figur eine zulässige Färbung ablesen. Für $t = 2$ gilt die Figur ohne die roten Punkte und die gestrichelten Linien, für $t = 3$ ergänze man in Gedanken die neuen Indices bei den Eckpunkten. Die Zahlen an den Strecken geben deren Länge an, in Klammern ist dies die Länge für $t = 3$.

Wie oben kann man sich mit Hilfe der Tabelle und der Figur von der Zulässigkeit der Färbung überzeugen. (Für $t = 2$ ist $t - 2 = 0$, d.h. in Zeile 4 wird eine leere Menge von Strecken beschrieben.)



$n = 4t + 1, t \geq 2$: Auflistung der gefärbten Strecken, sortiert nach nicht positiven Indices der Anfangspunkte, für $t = 2, n = 9$ (d.h. im 18-Eck) entfällt die 4. Zeile.

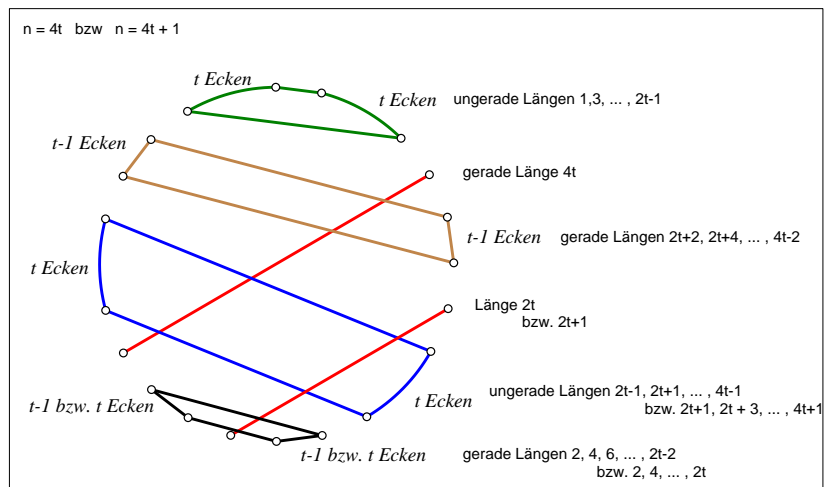
Zählindex	Anz.	Strecken	Art	Längen
$i = 0$	1	$(0, 2t + 2)$	gerade	$2t + 2$
$1 \leq i \leq t$	t	$(-i, -i)$	gerade	$2, 4, \dots, 2t$
$t + 1 \leq i \leq 2t$	t	$(-i, i + 1)$	ungerade	$2t + 3, \dots, 4t + 1$
$2t + 1 \leq i \leq 3t - 2$	$t - 2$	$(-i, i + 2)$	gerade	$2t + 4, \dots, 4t - 2$
$i = 3t - 1$	1	$(-3t - 1, t + 1)$	gerade	$4t$
$3t \leq i \leq 4t$	$t + 1$	$(-i, i + 1)$	ungerade	$1, 3, \dots, 2t + 1$



2. Beweis(skizze): Es sei $n = 4t$ bzw. $n = 4t + 1$, $t \geq 1$. Ausgehend von zwei benachbarten Ecken markieren wir nach links und nach rechts fortlaufend jeweils t Ecken grün, $t - 1$ Ecken blau, und im Fall $n = 4t$ noch $t - 1$ Ecken bzw. im Fall $n = 4t + 1$ noch t Ecken schwarz, wobei wir wie in der Skizze angegeben zweimal rechts und einmal links eine Ecke überspringen. Auch die zuletzt übrig gebliebene Ecke wird nicht gefärbt. Die Ecken sind – anders als in der Skizze angedeutet – gleichabständig auf dem Umkreis des $2n$ -Ecks verteilt. Gleichgefärbte Ecken bestimmen so trapezförmige Bereiche, wobei für $t = 1$ und $t = 2$ diese Bereiche evtl. entfallen oder zu einem Strich entarten. In diesen Bereichen gibt es t bzw. $t - 1$ parallele Sehnen zwischen gleichfarbigen Endpunkten links und rechts. Diese Sehnen färben wir rot, dazu gemäß Skizze zwei Sehnen zwischen den vier nicht gefärbten Ecken.

Nun lässt sich leicht – wenn auch nicht schnell – verifizieren, dass tatsächlich ein $2n$ -Eck vorliegt und jede der möglichen Längen $1, 2, \dots, 4t$ bzw. $1, 2, \dots, 4t + 1$ unter den rot gefärbten Sehnen genau einmal vorkommt.

Man beachte, dass die längste Diagonale im Fall $n = 4t$ zwischen den ungefärbten Punkten verläuft, im Fall $n = 4t + 1$ zwischen zwei blauen Punkten.



Bemerkung: Die Aufgabe ist eine Variation der Aufgabe MO451343 aus der Bundesrunde der Mathematik-Olympiade, die ihrerseits auf einer von Th. Skolem im Jahr 1957 vorgestellten und gelösten Aufgabe (mit Verallgemeinerung) beruht: Die Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ sollen so zu Paaren (a_r, b_r) mit $r = 1, 2, \dots, n$ zusammengefasst werden, dass $b_r - a_r = r$ für alle r . Für Zahlen der Form $n = 4m$ und $n = 4m + 1$ gibt Skolem eine lückenhafte Parametrisierung einer möglichen Paarbildung an (u.a. ist der Fall $n = 5$ nicht geklärt). Jede solche Paarbildung führt auch zu einer Färbung im Sinne unserer Aufgabe, d.h. der Beweis bei Skolem für die hinreichende Bedingung kann im Wesentlichen übernommen werden. Für den Beweis der Umkehrung sind allerdings zusätzliche Argumente notwendig.

SKOLEM, TH. "ON CERTAIN DISTRIBUTIONS OF INTEGERS IN PAIRS WITH GIVEN DIFFERENCES." *Mathematica Scandinavica*, vol. 5, no. 1, 1957, pp. 57–68. JSTOR, <http://www.jstor.org/stable/24490137>. Accessed 21 Oct. 2023.