BUNDESWETTBEWERB
MATHEMATIK
Bildung & Begabung

Aufgaben und Lösungen

1. Runde 2022

Vorläufige Fassung für die Homepage

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 07. März 2022

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
STIFTERVERBAND
KULTUSMINISTER KONFERENZ

Aufgabe 1: Fünf Eichhörnchen haben zusammen einen Vorrat von 2022 Nüssen. Am ersten Tag kommen 2 Nüsse hinzu, am zweiten Tag 4 Nüsse, am dritten 6 Nüsse und so weiter, d.h. an jedem weiteren Tag kommen jeweils 2 Nüsse mehr hinzu als am Tag zuvor.

Am Ende irgendeines Tages teilen die Eichhörnchen den Vorrat untereinander auf. Ist es möglich, dass dabei alle gleich viele Nüsse erhalten und keine Nuss übrigbleibt?

Anmerkung: Die Nüsse bleiben beim Verteilen ganz. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Nein, das ist nicht möglich.

Beweis: Wenn jedes Eichhörnchen gleich viele Nüsse erhalten soll und keine Nuss übrigbleiben darf, muss die Gesamtzahl der Nüsse im Vorrat durch 5 teilbar sein, d.h. die Endziffer dieser Gesamtzahl (bei Darstellung im Dezimalsystem) muss die Ziffer 5 oder die Ziffer 0 sein. ist. Nun können wir verschieden schließen:

Variante 1: Die Endziffer der hinzukommenden Nüsse an den einzelnen Tagen ist der Reihe nach 2, 4, 6, 8, 0. 2, usw.; hieraus können wir beginnend vom Tag 1 jeweils durch einfache Addition die Endziffer des Gesamtvorrates am Ende des Tages berechnen. Diese Rechnung hängt nur ab von dem Paar (Endziffer der Gesamtzahl der Nüsse im Vorrat vom Vortag; Endziffer der Nüsse, die im Laufe des Tages hinzukommen). Darstellung in einer Tabelle ergibt:

Tag Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9...
Endziffer der hinzukommenden Nüsse	2	4	6	8	0	2	4	6	8...
Endziffer des Vorrates am Tag zuvor	2	4	8	4	2	2	4	8	4...
Endziffer des Vorrates am Ende des Tages	4	8	4	2	2	4	8	4	2...

Diese Zahlenpaare sind (2;2), (4;4), (6;8), (8;4), (0;2), (2;2),.... Das Paar am 6. Tag ist das gleiche wie am 1. Tag; damit wiederholen sich die Zahlenpaare der ersten 5 Tage immer wieder. Die Endziffern 0 und 5 kommen bei der Anzahl der Nüsse im Vorrat nie vor, damit ist alles gezeigt.

Variante 2 (abstrakte Formulierung der gleichen Gedanken): Sei $v(n)$ die Anzahl Nüsse im Vorrat am Ende des Tages n, und $h(n)$ die Anzahl der am Tag n neu hinzukommenden Nüsse. Dann gilt für $n \geq 0$

$$h(0) = 0, \quad h(n+1) = h(n) + 2, \quad v(0) = 2022, \quad v(n+1) = v(n) + h(n+1).$$

Offensichtlich ist $h(n) = 2n$ und mit der Gaußschen Summenformel

$$v(n) = 2022 + ((h(1) + h(2) + ... + h(n)) = 2022 + 2\,(1 + 2 + ... + n)$$
$$= 2022 + n(n+1).$$

Nun können wir verschieden schließen:

Variante 1: Wir untersuchen wir, ob Zahlen n gibt, für die $v(n) \equiv 0 \bmod 5$ gilt; hierzu genügt eine Rechnung mit je einem Wert n aus den fünf Restklassen mod 5: Es ist $v(1) \equiv 2 + 1 \cdot 2 \equiv 4$, $v(2) \equiv 2 + 2 \cdot 3 \equiv 3$, $v(3) \equiv 2 + 3 \cdot 4 \equiv 4$, $v(4) \equiv 2 + 4 \cdot 5 \equiv 2$, $v(5) \equiv 2 + 5 \cdot 6 \equiv 2$. Für keines dieser n ist $v(n) = 0$, das war zu zeigen.

Variante 2: Damit ist $v(n)$ genau dann durch 5 teilbar, wenn $n(n+1)$ die Endziffer 3 oder 8 hat. Da aber von den aufeinander folgenden Zahlen n und $n+1$ stets eine gerade ist, sind $n(n+1)$ und damit auch $2022 + n(n+1)$ gerade, d.h. $h(n)$ ist ebenfalls gerade und kann somit niemals die ungerade Endziffer 3 haben. Das Produkt von zwei aufeinander folgenden Zahlen kann aber auch nie Endziffer 8 haben: Zum Überprüfen genügt es zu zeigen, dass keines der Produkte von aufeinander folgender Endziffern auf Ziffer 8 endet. Produkte mit Faktoren 0 und 5 scheiden von vorne herein aus, und von $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$, $6 \cdot 7 = 42$, $7 \cdot 8 = 56$, $8 \cdot 9 = 72$ endet keines mit Ziffer 8. Damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 2: Eva zeichnet ein gleichseitiges Dreieck und seine Höhen. In einem ersten Schritt zeichnet sie das Mittendreieck des gleichseitigen Dreiecks ein, im zweiten Schritt das Mittendreieck dieses Mittendreiecks und so weiter.

Nach jedem Schritt zählt Eva alle Dreiecke, deren Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegen. Wie viele Mittendreiecke muss sie mindestens eingezeichnet haben, damit die Figur mehr als 2022 solche Dreiecke enthält?

Hinweise: Das Mittendreieck eines Dreiecks besteht aus den Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der Seiten. Vor dem Einzeichnen des ersten Mittendreiecks findet man mehr als 6 solche Dreiecke.

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Antwort: Eva muss mindestens 65 Mittendreiecke einzeichnen, damit die Figur 2022 Dreiecke der geforderten Art hat.

Bezeichnungen: Den Ausdruck "Dreiecke, deren Seiten vollständig auf gezeichneten Strecken liegen" verkürzen wir zu "Teil−Dreiecke" (wobei natürlich das Ausgangsdreieck auch ein Teil−Dreieck ist), den Ausdruck "gezeichnete Strecken" verkürzen wir zu "Strecken".

Mit $D(n)$ ($n = 0, 1, 2, 3, ...$) bezeichnen wir die Gesamtzahl an Teil−Dreiecken nach Einzeichnen von n Mittendreiecken.

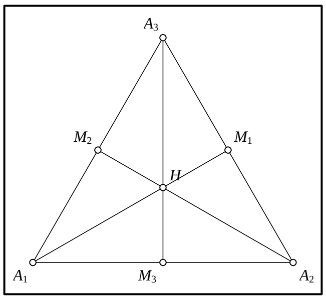
Die Ecken des Ausgangsdreiecks bezeichnen wir mit A_i ($i = 1, 2, 3$), den Höhenschnittpunkt mit H, die Mitten der Seiten mit M_i, wobei M_i die Mitte derjenigen Seite ist, die der Ecke A_i gegenüberliegt. Bekanntlich sind im gleichseitigen Dreieck die Höhen gleichzeitig Seitenhalbierende, d.h. A_i, H und M_i liegen auf einer Geraden.

Beweis (vollständige Induktion nach Anzahl n der eingezeichneten Mittendreiecke):

Wir werden zeigen, dass $D(n) = 16 + 31n$ ($n \geq 0$). Dann ist die Forderung $D(n) = 16 + 31n \geq 2022$ äquivalent zu $n \geq (2022 - 16) : 31 > 64{,}7$, also zur Behauptung $n \geq 65$.

<u>Induktionsanfang</u>: Die Formel stimmt für $n = 0$, d.h.

$$D(0) = 16 + 0 \cdot 31 = 16.$$



Das Ausgangsdreieck hat 7 Punkte, die Ecken möglicher Teil−Dreiecke sind. In folgender Liste haben wir alle Teil−Dreiecke aufgeführt, sortiert nach Art der Ecken. Die Anzahl dieser Teil−Dreiecke berechnet man sofort mit einfachster Kombinatorik, sie stehen in jeder Zeile am Ende in Klammern.

Es gibt Teil−Dreiecke mit

a) drei Ecken A_i (1),

b) zwei von drei Ecken A_i, A_j und einer Ecke H (3),

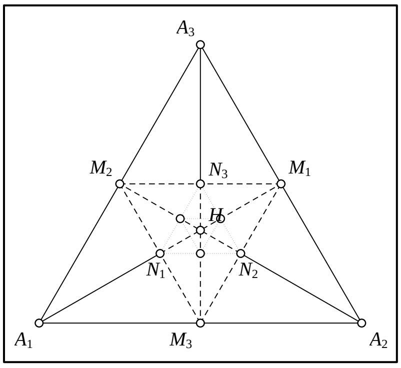
c) zwei von drei Ecken A_i, A_j und einer Ecke M_k ($k=i$ oder $k=j$) (6),

d) einer von drei Ecken A_i, H und einer von zwei Ecken M_j ($i \neq j$) (6).

Weitere Teil−Dreiecke gibt es nicht, da die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte noch nicht eingezeichnet sind. Addition ergibt tatsächlich $D(0) = 16 + 0 \cdot 31$.

(Kontrollrechnung: Es gibt $\binom{7}{3} = 35$ Tripel von möglichen Ecken. Von diesen führen nicht alle zu Teil−Dreiecken: Die drei Ecken dürfen nicht auf einer (schon gezeichneten!) Strecke liegen (das sind 6 Tripel), sie dürfen nicht genau 2 der 3 Ecken M_i enthalten (das sind $3 \cdot (7-3) = 12$ Tripel) und nicht alle 3 Ecken M_i (das ist 1 Tripel). damit bleiben tatsächlich $35 - 6 - 12 - 1 = 16$ Dreieck-erzeugende Tripel übrig.)

<u>Induktionsannahme</u>: Es sei $D(n) = 16 + 31n$ für ein bestimmtes $n \geq 0$.



Induktionsschluss: Dann ist $D(n + 1) = 16 + 31\cdot(n + 1)$.

Zum Nachweis betrachten wir ein Dreieck $A_1A_2A_3$ mit $n+1 \geq 1$ eingezeichneten Mittendreiecken und hier zunächst nur das zuerst eingezeichnete Teil−Dreieck $M_1M_2M_3$. Dieses Dreieck ist ebenfalls gleichseitig und in ihm sind noch n Mittendreiecke eingezeichnet, ebenfalls die Höhen, diese liegen auf den Höhen des Ursprungsdreiecks, d.h. H ist auch der Schnittpunkt der Höhen von Dreieck $M_1M_2M_3$. Die Schnittpunkte der Höhen von Dreieck $M_1M_2M_3$ mit den Seiten M_iM_j nennen wir N_k (i, j, k verschieden). Zentrische Streckung mit Zentrum H und Streckfaktor 2 und anschließender Drehung im H um 180° führt es in das Dreieck $A_1A_2A_3$ mit n eingezeichneten Mittendreiecken über, d.h. die Anzahl der in Dreieck $M_1M_2M_3$ enthaltenen Teil−Dreiecke ist nach Induktionsannahme $D(n)$. Jedes dieser Teil−Dreiecke ist auch ein Teil−Dreieck bezogen auf $A_1A_2A_3$.

Nun bestimmen wir die Anzahl der noch nicht gezählten Teil−Dreiecke von Dreieck $A_1A_2A_3$. In der Figur haben wir alle Strecken, die Strecken von Dreieck $M_1M_2M_3$ und seinen Mittendreiecken sind, gestrichelt eingezeichnet. Die noch nicht gezählten Teil−Dreiecke von $A_1A_2A_3$ sind nun die Dreiecke, die mindestens eine Seite haben, die mindestens zum Teil nicht gestrichelt ist. Da jede nicht gestrichelte Strecke einen Endpunkt A_i hat, sind die noch nicht gezählten Dreiecke genau die, die mindestens eine Ecke A_i haben. Dies sind zunächst die 16 Dreiecke, die nur Ecken A_i, M_i und H, aber nicht zwei oder drei Ecken M_i haben (das folgte oben aus der Überlegung für $n = 0$). Die Ecken N_i und H auf den Höhen sind die einzigen, die mit der Ecke M_j ($j \neq i$) über eine Strecke verbunden sind. Deswegen kommen noch genau 3 Teil−Dreiecke $A_iM_jM_k$, ($k \neq i \neq j$), 6 Teil−Dreiecke $A_iM_iM_j$ ($j \neq i$) und 6 Teil−Dreiecke $A_iN_iM_j$ ($j \neq i$) hinzu, das sind zusammen 15. Damit ist

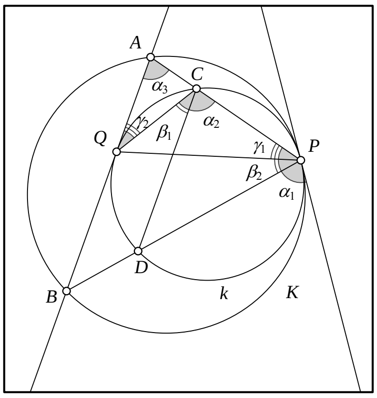
$$D(n + 1) = D(n) + (16 + 15) = 16 + 31n + 31 = 16 + 31(n + 1) = D(n + 1)$$; das war zu zeigen.

Bemerkung: In obigem Beweis wurden die zu zählenden Dreieck nach einem bestimmten Merkmal (hier: Art der Ecken) klassifiziert. So wurde eine Überprüfung erleichtert, ob jedes Dreieck genau einmal gezählt wurde. Eine solche Klassifizierung ist auf mehrere Arten möglich, z.B. über die Form der Dreiecke: Es werden nur Linien gezeichnet, die um Vielfache von 30° von einer Seite des ursprünglichen Dreiecks gedreht wurden. Damit können nur Innenwinkel von 30°, 60°, 90°, 120° und 150 ° entstehen, bei den zu zählenden Dreiecken scheiden Innenwinkel von 150° aus, weil sonst die Innenwinkelsumme von 180° im Dreieck nicht mehr erreicht werden kann. So bleiben nur Dreiecke in drei Formen übrig: gleichseitige mit 60° Innenwinkel, gleichschenklige mit Basiswinkel 30° und Spitzenwinkel 120° sowie rechtwinklige mit 90°, 60° und 30° Innenwinkel.

Bemerkung: Wollte Eva diese Figur tatsächlich zeichnen, so müsste sie wohl ein großes Stück Papier verwenden: Die Seite jeden Mittendreiecks ist halb so lang wie die des zuvor eingezeichneten. Wenn wir also davon ausgehen, dass das letzte Mittendreieck eine Seitenlänge von 1 Ångström = $10^{-10}m$ hat (das ist die Größenordnung des Abstandes zweier Atome in einem Molekül und kleiner kann man wohl nicht zeichnen), so hat das Ursprungsdreieck nach Auskunft meines Taschenrechners eine Seitenlänge von $2^{65} \cdot 10^{-10}m \approx 3{,}69 \cdot 10^9 m$. Das ist ungefähr die 10fache Entfernung Erde – Mond ($384\,000\,km = 3{,}84 \cdot 10^8 m$). Ob da bei der Zeichnung schon quantenmechanische oder relativistische Effekte mitberücksichtigt werden müssen, entzieht sich meiner Kenntnis.

Aufgabe 3: Ein Kreis k berührt einen großen Kreis K von innen im Punkt P, der Punkt Q sei ein von P verschiedener Punkt auf k. Die Tangente an k im Punkt Q schneidet K in den Punkten A und B.

Beweise, dass die Gerade PQ den Winkel $\angle APB$ halbiert.



1. Beweis (Sehnen−Tangenten−Winkelsatz): Seien C und D die Schnittpunkte der Geraden AP bzw. BP mit k. Zusätzlich zeichnen wir noch die gemeinsame Tangente an k in P ein. Mit den Bezeichnungen der Figur genügt es zu zeigen, dass $\gamma_1 = \beta_2$.

Mit Umfangswinkelsatz in Kreis k über der Sehne QD folgt

$\beta_1 = \beta_2$

Mit Sehnen−Tangenten−Satz in den Kreisen k und K folgt

$\gamma_1 = \gamma_2$ (über der Sehne CQ)

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (über den Sehnen PD bzw. PB).

Aus der letzten Zeile folgt insbesondere nach Stufenwinkelsatz $CD \| AB$. Zusammen mit dem Wechselwinkelsatz folgt nun

$\beta_2 = \beta_1 = \gamma_2 = \gamma_1$. Das war zu zeigen.

2. Beweis (Strahlensatz und Sehnen−Tangenten−Satz): Die Gerade PQ ist bekanntlich genau dann Winkelhalbierende, wenn $\overline{AQ} : \overline{QB} = \overline{AP} : \overline{BP}$.

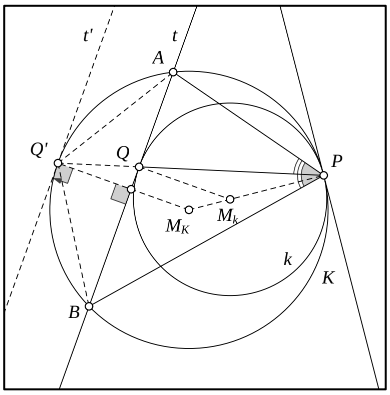
Mit Sehnen−Tangenten−Winkel−Satz in den Kreisen k und K folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (über den Sehnen PD bzw. PB), nach Stufenwinkelsatz also $CD \| AB$. Diese Parallelen bilden zusammen mit Zentrum P und den Strahlen $[PA$ und $[PB$ eine Strahlensatzfigur, aus der wir ablesen können, dass

$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{AP} : \overline{BP}$ (1)

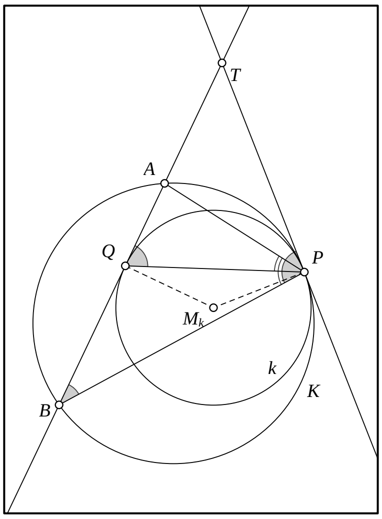
Mit Sehnen−Tangenten−Satz gilt $\overline{AQ}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AP}$, $\overline{BQ}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BP}$, also zusammen mit

$\overline{AQ}^2 : \overline{BQ}^2 = (\overline{AC} \cdot \overline{AP}) : (\overline{BD} \cdot \overline{BP}) = (\overline{AC} : \overline{BD}) \cdot (\overline{AP} : \overline{BP}) = (\overline{AP} : \overline{BP})^2$.

Hieraus folgt sofort $\overline{AQ} : \overline{BQ} = \overline{AP} : \overline{BP}$, das war zu zeigen.



3. Beweis, (Zentrische Streckung): Diejenige zentrische Streckung mit Zentrum P, die M_k (den Mittelpunkt von k) auf M_K (den Mittelpunkt von K) abbildet, bildet den Kreis k auf den Kreis K ab, den Punkt Q auf einen Punkt, den wir Q' nennen, und die Tangente t in Q an k auf die Tangente t' in Q' an K. Also ist $Q'M_K \perp t'$, und weil $t' \| t$, ist auch $Q'M_K \perp t$ und damit – aus Symmetriegründen − $Q'M_K$ Mittelsenkrechte der Sehne AB im Kreis k. Also sind die Sehnen AQ' und BQ' gleich lang und nach Umfangswinkelsatz die Winkel APQ' und $Q'PB$ gleich weit. Das war zu zeigen.



4. Beweis (Sehnen−Tangentensatz bzw. ähnliche Dreiecke): Falls die beiden Tangenten parallel sind, liegen AP und BP symmetrisch bez. der Geraden PM_k, insbesondere ist dann $\angle APQ = \angle QPB$.

Falls die beiden Tangenten nicht parallel sind, haben sie einen Schnittpunkt, den wir T nennen. O.B.d.A. nehmen wir an, dass T und A in der gleichen Halbebene bez. QP liegen; falls nicht, vertauschen wir im Beweis die Bezeichnungen A und B.

Nun ist das Dreieck QPT gleichschenklig mit Basis QP, weil die Strecken TP und TQ als Tangentenabschnitte vom gleichen Punkt an den Kreis k gleich lang sind (oder: weil sie symmetrisch bez. der Geraden TM_k liegen). Damit gilt

$$\angle TPA + \angle APQ = \angle TPQ = \angle PQT \quad (1)$$

Im Dreieck BPQ ist nun nach Außenwinkelsatz

$$\angle PQT = \angle PBQ + \angle QPB \quad (2)$$

Nach Sehnen−Tangenten−Winkelsatz ist über der Sehne AP des Kreis K nun

$$\angle TPA = \angle PBA = \angle PBQ \quad (3)$$

Nun setzen wir (1), (2) und (3) zusammen und erhalten

$$\angle TPA + \angle APQ = \angle TPQ \overset{(1)}{=} \angle PQT \overset{(2)}{=} \angle PBQ + \angle QPB \overset{(3)}{=} \angle TPA + \angle QPB.$$

Auf beiden Seiten subtrahieren wir $\angle TPA$ und erhalten $\angle APQ = \angle QPB$ und sind fertig.

Variante für (3): Die Dreiecke APT und PTB haben bei T den gleichen Winkel und nach Sehnen−Tangenten−Satz gilt $\overline{TP}^2 = \overline{TA}\cdot\overline{TB}$, also $\overline{TA}:\overline{TP} = \overline{TP}:\overline{TB}$, also sind die Dreiecke ähnlich. Damit ist $\angle TPA = \angle PBT = \angle PBQ$.

Aufgabe 4: Für jede positive ganze Zahl k sei a_k der größte Teiler von k, der nicht durch 3 teilbar ist. Die Folge (s_n) wird definiert durch $s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Beweise: (a) Die Zahl s_n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Anzahl der Einsen in der Darstellung von n im Dreiersystem durch 3 teilbar ist.

(b) Es gibt unendlich viele Zahlen n, für die s_n durch 3^3 teilbar ist.

Hinweis: Es ist z.B. $s_6 = 1 + 2 + 1 + 4 + 5 + 2$.

Vorbemerkungen: Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir gelegentlich $s_n = s(n)$ und $a_k = a(k)$.

Als bekannt setzen wir das Prinzip der Darstellung einer natürlichen Zahl n im Dreiersystem voraus:

Es gibt eindeutig bestimmte Ziffern $b_j \in \{0,1,2\}$, $j = 0, 1, ..., m$, $b_m \neq 0$, mit $n = \sum_{j=0}^{m} b_j 3^j$; diese Ziffern schreiben wir nebeneinander und nennen $n = b_m b_{m-1} ... b_1 b_0|_3$ die Darstellung von n im Dreiersystem. So ist z.B. $n = 20 = \mathbf{2}\cdot 3^2 + \mathbf{0}\cdot 3^1 + \mathbf{2}\cdot 3^0 = \mathbf{202}|_3$.

$a(k)$ entsteht aus k, indem man in der Darstellung von k im Dreiersystem die Endnullen streicht.

Beweis: Vor dem eigentlichen Beweis leiten wir einige Eigenschaften der $a(k)$ und der $s(n)$ her.

Nach abstrakter Definition gilt "a Teiler von b $\Leftrightarrow$ es gibt eine ganze Zahl z , für die $az = b$. Nach dieser Definition ist 0 der größte nicht durch 3 teilbare Teiler von 0, d.h. die Definitionen von $a(0) := 0$ und $s(0) := 0$ ist sinnvoll. Damit "passen" einige Formeln auch für $s(1)$ und $s(2)$.

Wir schreiben die Zahl k als Produkt einer Dreierpotenz 3^r und einer nicht durch 3 teilbaren ganzen Zahl t, also $k = 3^r \cdot t$ und $ggt(3,t) = 1$. Dann ist $a(k) = t$ und es folgt sofort

<u>Lemma 1</u>: Für alle $n \geq 0$ gilt: $a(k) = \begin{cases} a(k/3) & \text{falls } k \text{ durch 3 teilbar} \\ k & \text{falls } k \text{ nicht durch 3 teilbar} \end{cases}$

<u>Lemma 2</u>: Für alle $n \geq 0$ gilt:

(1) $s(3n) = s(n) + 3n^2$,

(2) $s(3n + 1) = s(n) + 3n^2 + 3n + 1$,

(3) $s(3n + 2) = s(n) + 3(n + 1)^2$.

Zum Nachweis von (1) stellen wir in der Definition $s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n$ die Summanden um, dabei benützen wir, dass in der Reihe 1, 2, ... , $3n$ jeweils genau n Zahlen mit Dreierrest 0 bzw. 1 bzw. 2 gibt. Dann ist mit Lemma 1

$$\begin{aligned} s(3n) &= (a_3 + a_6 + ... + a_{3n}) + (a_1 + a_{3n-1}) + (a_4 + a_{3n-4}) + ... + (a_{3n-2} + a_2) \\ &= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (1 + 3n - 1) + (4 + 3n - 4) + ... + (3n - 2 + 2) = s(n) + n\cdot 3n \\ &= s(n) + 3n^2. \end{aligned}$$

$$s(3n + 1) = s(3n) + a(3n + 1) = s(n) + 3n^2 + 3n + 1,$$

$$s(3n + 2) = s(3n + 1) + a(3n + 2) = s(n) + 3n^2 + 3n + 1 + 3n + 2 = s(n) + 3(n + 1)^2.$$

Aus Lemma 2 können wir sofort ablesen:

<u>Lemma 3</u>: Für alle k gilt:

(1) $s(3n) \equiv s(n) \bmod 3$,

(2) $s(3n + 1) \equiv s(n) + 1 \bmod 3$,

(3) $s(3n + 2) \equiv s(n) \bmod 3$.

zu a) Sei nun n positiv ganz mit der Darstellung im Dreiersystem $n = \sum_{j=0}^{m} b_j 3^j$ mit $b_j \in \{0,1,2\}$, $b_m \neq 0$, ferner $e(n)$ die Anzahl der Ziffern 1 in dieser Darstellung. Mit n^* bezeichnen wir die Zahl, die entsteht, wenn man in der Darstellung von n im Dreiersystem die letzte Ziffer b_0 streicht. (Gleichwertige Definition: $n^* := \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ = größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $\frac{n}{3}$ ist .) Dann gilt

$$n = 3\sum_{j=1}^{m} b_j 3^{j-1} + b_0 \;=\; 3n^* + b_0 \text{ mit } b_0 \in \{0,1,2\},$$

d.h. die letzte Ziffer b_0 von n in der Darstellung im Dreiersystem ist der Rest von n bei Division duch 3.

Mit Lemma 3 können wir nun schließen:

$$s(n) \;=\; s(3n^* + b_0) \;\equiv\; \left\{\begin{matrix} s(n^*) & \text{falls } b_0 = 0 \\ s(n^*)+1 & \text{falls } b_0 = 1 \\ s(n^*) & \text{falls } b_0 = 2 \end{matrix}\right\} \bmod 3$$

Diesen Schritt wiederholen wir so lange mit den Zahlen n^*, $(n^*)^*$, $((n^*)^*)^*$, ... bis nur noch die erste Ziffer b_m der Darstellung im Dreiersystem übrigbleibt, dabei ist $b_m \in \{1,2\}$. Offensichtlich ändert sich dabei die Restklasse mod 3 genau dann, wenn eine Ziffer 1 gestrichen wird, in diesem Fall wird 1 addiert. Also ist

$$s(n) \;\equiv\; s(b_0) + \#(\text{bis dahin gestrichenen Ziffern 1}) \bmod 3.$$

Falls nun $b_0 = 1$, ist. $s(n) \equiv s(1) + (e(n) - 1)\cdot 1 \equiv 1 + (e(n) - 1) \equiv e(n) \bmod 3$, und falls $b_0 = 2$, erhalten wir ebenfalls $s(n) \equiv s(2) + e(n) \cdot 1 \equiv 1 + 2 + e(n) \equiv e(n) \bmod 3$, weitere Fälle gibt es nicht. Das war zu zeigen.

1. Beweis zu b) (mit versteckter vollständiger Induktion): Inspiriert von Lemma 2 (3) suchen wir zunächst ein n_0 derart, dass sowohl $s(n_0) \equiv 0 \bmod 27$ als auch $3(n_0 + 1)^2 \equiv 0 \bmod 27$. Dann ist nämlich nach Lemma 2 (3) auch $s(3n_0 + 2) = s(n_0) + 3(n_0 + 1)^2$ Summe zweier durch 27 teilbar Zahlen, also selbst auch durch 27 teilbar. Mit $n_1 := 3n_0 + 2$ haben wir dann sogar schon eine zweite Zahl n_1 mit $s(n_1) \equiv 0 \bmod 27$.

Durch Probieren finden wir $n_0 = 20 = 3\cdot 6 + 2$ mit $s(n_0) \equiv 0 \bmod 27$, denn es ist

$$s(20) = s(3\cdot 6 + 2) = s(6) + 3\cdot(6 + 1)^2 = s(2) + 2 \cdot 2^2 + 147 = 3 + 8 + 147 = 162 = 7 \cdot 27..$$

Erfreulicherweise ist nun auch $n_1 := 3n_0 + 2 \equiv 2 \bmod 3$ und damit $3(n_1 + 1)^2 \equiv 0 \bmod 27$, d.h. auch für $n_2 := 3n_1 + 2$ ist nach Lemma 2 (3)

$$s(n_2) = s(3n_1 + 2) = s(n_1) + 3(n_1 + 1)^2$$

wieder Summe zweier durch 27 teilbarer Zahlen. Induktiv gilt dies dann für alle n_i der rekursiv definierten Folge $n_0 = 20$, $n_{i+1} = 3n_i + 2$ $(i \geq 0)$. Diese Folge ist streng monoton wachsend, führt also zu unendlich vielen verschiedenen Zahlen n, für die $s(n) \equiv 0 \bmod 27$.

Bemerkungen: Bei der Suche nach n_0 hilft folgende Überlegung: Die Zahl $3(n_0 + 1)^2$ ist offensichtlich genau dann durch 27 teilbar, wenn 9 Teiler von $(n_0 + 1)^2$ ist, also wenn 3 Teiler von $n_0 + 1$ ist, d.h. wenn $n_0 \equiv 2 \bmod 3$. Es genügt also, n_0 unter den Zahlen 2, 5, 8, ... zu suchen.

Es gilt $n_i = 7\cdot 3^{i+1} - 1$ für alle $i \geq 0$.

1. Nachweis: Es ist $n_0 = 20 = 7\cdot 3^{0+1} - 1 = 2\cdot 9 + 0\cdot 3 + 2\cdot 1$, die Darstellung im Dreiersystem ist also $n_0 = 202|_3$. Die Zahl $n_{i+1} = 3n_i + 2$ entsteht aus n_i, indem wir im Dreiersystem an die Zahl n_i die Ziffer 2 anhängen. Hieraus folgt sofort, dass

$$n_i = 20\underbrace{2.....2}_{i+1 \text{ Ziffern } 2}|_3 = 21\underbrace{0.....0}_{i+1 \text{ Ziffern } 0}|_3 - 1 = (2\cdot 3 + 1)\cdot 3^{i+1} - 1 = 7\cdot 3^{i+1} - 1 \text{ für alle } i \geq 0.$$

2. Nachweis: Sei $c_i := n_i + 1$. Dann ist $c_{i+1} = 3n_i + 2 + 1 = 3(n_i + 1)$. Mit $c_0 = 21 = 7 \cdot 3$ ergibt sich sofort $c_i = 7\cdot 3^{i+1}$, also $n_i = 7\cdot 3^{i+1} - 1$ $(i \geq 0)$.

Die oben beschriebene Konstruktion kann mit mehreren möglichen Startwerten druchgeführt werden, z.B. $n_0 \in \{20, 383, 419, 566, 767, 797, 959, 983, 995, ...\}$. Dieser Ansatz führt aber nicht zu allen möglichen n mit $27|s(n)$.

2. Beweis zu b): Wir werden allgemeiner zeigen:

Für alle $m \geq 1$, $d \geq 1$ gilt: Für $n = n(m,d) = \sum_{j=1}^{m3^d} 3^{jd}$ ist $s(n) \equiv 0 \mod 3^d$,

die Aussage folgt dann für $d = 3$. Zum Nachweis folgern wir zunächst aus Lemma 2 (1):

<u>Lemma 4</u>: Für alle $M \geq 0$ und $d \geq 1$ gilt $s(3^M \cdot 3^d) \equiv s(3^d) \mod 3^d$.

Dies folgt sofort mit vollständiger Induktion nach M: Für $M = 0$ ist die Aussage trivialerweise richtig, und wenn sie richtig ist für ein bestimmtes M, dann gilt zusammen mit Lemma 2 (1)

$$s(3^{M+1} \cdot 3^d) = s(3 \cdot 3^M \cdot 3^d) = s(3^M \cdot 3^d) + 3\cdot(3^M \cdot 3^d)^2 \equiv s(3^M \cdot 3^d) + 3^{(2M+d+1)}\cdot 3^d \equiv s(3^d) \mod 3^d.$$

Weiter stellen wir zu vorgegebenen Zahlen u, k mit $k < 3^u$ die Zahl k in der eindeutig bestimmten Form $k = 3^{r(k)}\cdot t(k)$ mit $\mathrm{ggT}(3,t) = 1$ dar. Es ist dann $r(k) < u$, also $u - r(k) \geq 1$ und somit $3^{u-r(k)}$ durch 3 teilbar. Dann ist $k + 3^u = 3^{r(k)}\cdot(t(k) + 3^{u-r(k)})$; und weil $t(k)$ nicht durch 3 teilbar ist, aber $3^{u-r(k)}$ schon, gilt $\mathrm{ggT}(3,t(k) + 3^{u-r(k)}) = 1$. Damit ist $t(k) + 3^{u-r(k)}$ der größte nicht durch 3 teilbare Teiler von $k + 3^u$. Also gilt

$$a(k + 3^u) - a(k) = t(k) + 3^{u-r(k)} - t(k) = 3^{u-r(k)} \text{ für alle } k < 3^u.$$

Nun betrachten wir eine weitere Dreierpotenz 3^v mit $v \geq u$. Dann ist für alle $k = 1, 2, \ldots, n < 3^u$ der Ausdruck $a(k + 3^v) - a(k)$ ein Vielfaches von 3^{v-u+1}, denn es gilt

$$a(k + 3^v) - a(k) = t(k) + 3^{v-r(k)} - t(k) = 3^{v-r(k)} \text{ mit } r(k) < u \leq d, \text{ d.h. } v - r(k) \geq v - u + 1.$$

Dies gilt dann auch für die Summe dieser Ausdrücke, d.h. die Summe

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a\left(k+3^v\right)-a\left(k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}a\left(k+3^v\right)-\sum_{k=1}^{n}a\left(k\right) = \sum_{k=1}^{n+3^v}a\left(k\right)-\sum_{k=1}^{3^v}a\left(k\right)-\sum_{k=1}^{n}a\left(k\right) = s(n + 3^v) - [s(3^v) + s(n)]$$

ist Vielfaches von 3^{v-u+1}. Damit gilt folgendes Lemma:

<u>Lemma 5</u>: Für alle $n < 3^u$, $v \geq u$ gilt: $s(n + 3^v) \equiv s(n) + s(3^v) \mod 3^{v-u+1}$.

Nun wählen wir $v := (K + 1)d \geq u := Kd + 1$, also $v - u + 1 = (K + 1)d - (Kd + 1) + 1 = d$ und $n = n(K;d) = \sum_{j=1}^{K} 3^{jd} < 3^{Kd+1} = 3^v$. Dann können wir mit vollständiger Induktion zeigen:

$$\text{Für alle } K \geq 1 \text{ gilt: } s\left(\sum_{j=1}^{K} 3^{jd}\right) \equiv K \cdot s\left(3^d\right) \mod 3^d \qquad (*)$$

Für $K = 1$ ergibt sich schnell $s\left(\sum_{j=1}^{1} 3^{jd}\right) = s(3^d) \equiv 1 \cdot s(3^d) \mod 3^d$; und wenn die Aussage richtig ist für ein bestimmtes $K \geq 1$, dann ergibt sich zusammen mit Lemma 5 und Lemma 4 die Gültigkeit der Aussage für $K + 1$:

$$s\left(\sum_{j=1}^{K+1} 3^{jd}\right) = s\left(\sum_{j=1}^{K} 3^{jd} + 3^{(K+1)d}\right) \equiv s\left(\sum_{j=1}^{K} 3^{jd}\right) + s\left(3^{(K+1)d}\right) \mod 3^d \equiv K \cdot s(3^d) + s(3^d) \mod 3^d$$

$$\equiv (K + 1) \cdot s(3^d) \mod 3^d.$$

Schließlich wählen wir $K \equiv 0 \mod 3^d$, z.B. $K = m3^d$ ($m = 1,2, 3, \ldots$) und sind fertig: Für die offensichtlich unendlich vielen Zahlen $n(m) = \sum_{j=1}^{m3^d} 3^{jd}$ gilt $s(n) = s\left(\sum_{j=1}^{m\,3^d} 3^{jd}\right) \equiv m3^d \cdot s\left(3^d\right) \equiv 0 \mod 3^d$.

Bemerkung: Aus $d' \geq d$ und $N(d') = \sum_{j=1}^{3^{d'}} 3^{jd'} \equiv 0 \mod 3^{d'}$ folgt $N(d') = \sum_{j=1}^{3^{d'}} 3^{jd'} \equiv 0 \mod 3^d$. Der Nachweis von (*) mit der Wahl $K = 3^d$ genügt also, die Einführung der Variablen m ist also eigentlich unnötig.

Es ist $n(m) =$ 10...010...010...0 ..... $10\ldots010\ldots00|_3$ mit $m\cdot 3^d$ Zifferblöcken 100...0, die jeweils aus einer 1 gefolgt von d Ziffern 0 bestehen. Für $d = 3$ erhalten wir $n_1 \approx 4{,}06\cdot 10^{38}$.