

1. Auswahlklausur 2018/2019

Aufgabe 1

Die Menge aller positiver rationaler Zahlen sei mit \mathbb{Q}^+ bezeichnet.
Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ mit der Eigenschaft

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x^2) f(y) \quad (*)$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgabe 2

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $|AB| = |AC|$ sei M der Mittelpunkt von BC . Weiter sei P ein Punkt, für den PA parallel zu BC ist und $|PB| < |PC|$ gilt. Ferner seien X bzw. Y je ein Punkt auf der Geraden (PB) bzw. (PC) , so dass B auf der Strecke PX liegt, C auf der Strecke PY liegt und $\angle MXP = \angle PYM$ gilt.

Man beweise, dass $APXY$ ein Sehnenviereck ist.

Aufgabe 3

Gegeben ist eine positive ganze Zahl n und ein Spielbrett, das aus $n+1$ nebeneinander angeordneten quadratischen Feldern besteht, die von links nach rechts von 0 bis n nummeriert sind. Zu Beginn des Spiels befinden sich n Spielsteine auf dem Feld Nr. 0 und die anderen Felder sind leer.

Ein geduldiger Spieler wählt nun für jeden Zug ein Feld mit $k \neq 0$ Steinen und rückt einen davon um höchstens k Felder nach rechts. Dabei muss der Stein auf dem Spielbrett bleiben. Sein Ziel ist es, mit einer Folge solcher Züge alle n Steine auf das Feld Nr. n zu befördern.

Man beweise, dass der Spieler dieses Ziel nicht mit weniger als

$$\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$$

Zügen erreichen kann.

(Dabei bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als x ist.)

Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

» BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695
Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.

2. Auswahlklausur 2018/2019

Aufgabe 1. Finden Sie alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die eine positive ganze Zahl n existiert, sodass die Anzahl der Teiler von na und nb identisch ist.

Aufgabe 2. Entscheiden Sie, ob es eine Menge M positiver ganzer Zahlen gibt, die folgende Eigenschaft hat: Für jede positive rationale Zahl $r < 1$ existiert *genau eine* endliche Teilmenge S von M , sodass $\sum_{s \in S} 1/s = r$ gilt, das heißt die Summe der Kehrwerte aller Elemente von S ist gleich r .

Aufgabe 3. Wir betrachten ein Dreieck ABC und einen Punkt P in dessen Inneren. Die Spiegelpunkte von P an den Seiten \overline{BC} , \overline{CA} und \overline{AB} seien mit A_1 , B_1 und C_1 bezeichnet. Ferner sei Ω der Umkreis des Dreiecks $A_1B_1C_1$ und schließlich seien A_2 , B_2 und C_2 die zweiten Schnittpunkte der Geraden A_1P , B_1P und C_1P mit Ω . Beweisen Sie, dass sich die drei Geraden AA_2 , BB_2 und CC_2 auf Ω schneiden.

Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

» BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: +49 228 959 15-0
Fax: +49 228 959 15-19 | info@bildung-und-begabung.de | www.bildung-und-begabung.de
Bankverbindung: Sparkasse KölnBonn | IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50 | BIC: COLSDE33XXX
Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445 | St.-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695
Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

Das bundesweite Talentförderzentrum Bildung & Begabung ist eine Tochter des Stifterverbandes.
Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung und die Kultusministerkonferenz. Schirmherr ist der Bundespräsident.