Bundeswettbewerb Mathematik 2012

Der Bundeswettbewerb Mathematik ist eine Initiative des Stifterverbandes für die Deutsche Wissenschaft.
Er wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und vom Stifterverband unter Beteiligung der Länder.
Träger ist Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH.

Die Aufgaben der ersten Runde 2012

Aufgabe 1

Alex schreibt die sechzehn Ziffern 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9 in beliebiger Reihenfolge nebeneinander und setzt dann irgendwo zwischen zwei Ziffern einen Doppelpunkt, so dass eine Divisionsaufgabe entsteht.
Kann das Ergebnis dieser Rechnung 2 sein?

Aufgabe 2

Gibt es positive ganze Zahlen a und b derart, dass sowohl $a^2 + 4b$ als auch $b^2 + 4a$ Quadratzahlen sind?

Anmerkung: In den Aufgaben 1 und 2 ist jeweils die Richtigkeit des Resultats zu beweisen.

Aufgabe 3

Einem Quadrat ABCD wird ein gleichseitiges Dreieck DCE aufgesetzt. Der Mittelpunkt dieses Dreiecks wird mit M bezeichnet und der Schnittpunkt der Geraden AC und BE mit S.
Beweise, dass das Dreieck CMS gleichschenklig ist.

Aufgabe 4

Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 27-Ecks werden sieben beliebig ausgewählt.
Beweise, dass es unter diesen sieben Punkten drei Punkte gibt, die ein gleichschenkliges Dreieck bilden, oder vier Punkte, die ein gleichschenkliges Trapez bilden.

Bitte **beide Coupons** in Druckschrift vollständig und ohne Abkürzungen ausfüllen; den **Teilnahmecoupon** oben links auf die Rückseite des Umschlags (Verschluss rechts) aufkleben, den **EDV-Coupon** in den Umschlag legen. Bei **Gruppenarbeit** bitte auf dem Teilnahmecoupon ein Gruppenmitglied als Kontaktperson angeben und für **jedes** Gruppenmitglied einen **eigenen EDV-Coupon** beifügen. Mit der Teilnahme wird einer Speicherung der Daten zugestimmt.

✂ -

ABSENDER: **Teilnahmecoupon 2012**

Name ______ Vorname ______ geb. am ______

Straße / Nr. ______ PLZ / Ort ______

Tel. ______ Bundesland ______

Derzeitige Klassen- oder Jahrgangsstufe ☐ ☐ Männl.* ☐ Weibl.* * Zutreffendes bitte ankreuzen!

Die eingereichte Arbeit umfasst ☐ Seiten ☐ Gruppenarbeit*

Bearbeitete Aufgaben ☐ Aufgabe 1* ☐ Aufgabe 2* ☐ Aufgabe 3* ☐ Aufgabe 4*

Selbstständigkeitserklärung: Ich versichere, dass ich/die Gruppe alle beigefügten Lösungen selbstständig gefunden und ausgearbeitet habe/hat.

Datum ______ Unterschrift ______

Anschrift der Schule:

Name ______

Straße / Nr. ______

PLZ / Ort ______ Bundesland ______

✂ -

ABSENDER: **EDV-Coupon 2012**

Name ______ Vorname ______ geb. am ______

Straße / Nr. ______ PLZ / Ort ______

Tel. ______ Bundesland ______

Derzeitige Klassen- oder Jahrgangsstufe ☐ ☐ Männl.* ☐ Weibl.* * Zutreffendes bitte ankreuzen!

Die eingereichte Arbeit umfasst ☐ Seiten ☐ Gruppenarbeit*

Bearbeitete Aufgaben ☐ Aufgabe 1* ☐ Aufgabe 2* ☐ Aufgabe 3* ☐ Aufgabe 4*

Anschrift der Schule:

Name ______

Straße / Nr. ______

PLZ / Ort ______ Bundesland ______

Bitte die Teilnahmebedingungen und wichtige Hinweise auf der Rückseite beachten!

Teilnahmebedingungen im Überblick

• An der **1. Runde** des Bundeswettbewerbs Mathematik können sich Schüler/innen an Schulen in der Bundesrepublik Deutschland und deutschen Auslandsschulen, die zur allgemeinen Hochschulreife führen, beteiligen. Es sind Einzel- und Gruppenarbeiten zugelassen, die die Lösung zu mindestens einer der vier Aufgaben enthalten müssen. Maximal drei Teilnehmer/innen dürfen sich zu einer **Gruppe** zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Gruppenarbeiten durchlaufen wie Einzelarbeiten regulär das Korrekturverfahren. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe einzeln die Teilnahmeberechtigung für die 2. Runde. Ein **Preis** wird in der 1. Runde vergeben, wenn mindestens drei der vier Aufgaben richtig gelöst wurden.
Die auf dem Teilnahmecoupon abgedruckte **Selbstständigkeitserklärung** muss von Ihnen unterschrieben sein, bei Gruppen von der Kontaktperson (s.u.). Die Selbstständigkeitsverpflichtung bezieht sich dabei bereits auf die Phase der Lösungsfindung und nicht erst auf die endgültige Formulierung. Insbesondere sind Diskussionen von Lösungswegen im Internet nicht zulässig. Ein begründeter Verdacht auf Verstoß gegen diese Verpflichtung führt zum Ausschluss vom Wettbewerb.
• Für die **2. Runde** sind alle Preisträger/innen der 1. Runde (bei preiswürdigen Gruppenarbeiten alle Gruppenteilnehmer/innen einzeln) teilnahmeberechtigt. Es sind in dieser Runde nur *Einzelarbeiten* zugelassen, die Lösungen zu mindestens drei der vier Aufgaben enthalten.
• Für die **3. Runde** haben sich die 1. Preisträger/innen der 2. Runde qualifiziert.
• Die von der Korrekturkommission getroffene Entscheidung ist endgültig („Schiedsrichterentscheidung"). Der Rechtsweg ist in allen drei Runden ausgeschlossen.

Wichtige Hinweise

• Bei der Darstellung der Lösung müssen alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet werden. Dabei kommt es entscheidend auf die logische Vollständigkeit an. Eine glatte Korrektur der Arbeit soll ohne Anfertigung zusätzlicher Skizzen und ohne Ergänzen von Umformungsschritten möglich sein. Bitte geben Sie benutzte Hilfsmittel (Literatur etc.) an.
Umständliche und unnötig breite Ausführungen sowie Beweise und Überlegungen, die zur Lösung der gestellten Aufgabe nicht erforderlich sind, wirken sich negativ auf die Bewertung aus. Dies gilt auch für unverlangte Verallgemeinerungen, sofern sie zu einem erheblichen Mehraufwand in der Darstellung führen oder unangemessen anspruchsvolle mathematische Hilfsmittel benötigen. Derartige Ausführungen können allenfalls, ebenso wie Alternativlösungen, in einem Anhang, der keinen Einfluss auf die Bewertung hat, der Arbeit beigefügt werden.
Schwer lesbare Arbeiten können von der Bewertung ausgeschlossen werden. Es sollte auch vermieden werden, mathematische oder logische Symbole unnötig zu häufen, wenn dadurch die Lesbarkeit der Arbeit wesentlich eingeschränkt wird.
• Gegen die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners als Hilfsmittel zur Ideenfindung bzw. Rechnungskontrolle ist nichts einzuwenden, doch müssen die für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein.
• Schreiben Sie die Lösungen bitte gut lesbar und ohne Verwendung der Farben Rot und Grün (diese sind für die Korrektur reserviert) auf Blätter des Formats DIN A4 und lassen Sie links einen 6 cm breiten Rand frei. Ihre Lösungen sollten nach Möglichkeit maschinengeschrieben sein. Bitte nummerieren Sie alle Blätter durch und versehen sie oben rechts mit Ihrem Namen. Alle Blätter sollen nur einseitig beschrieben werden. Senden Sie die Arbeit in einem Briefumschlag des Formats DIN C4, auf dessen Rückseite oben links (Verschluss rechts) der vollständig ausgefüllte Teilnahmecoupon aufgeklebt ist, an die unten angegebene Adresse. Den EDV-Coupon bitte ausgefüllt in den Umschlag legen. **Gruppen** geben auf dem Teilnahmecoupon ein Gruppenmitglied als Kontaktperson an und fügen für jedes Gruppenmitglied einen eigenen EDV-Coupon bei.
• Die eingereichten Arbeiten gehen in das Eigentum des Wettbewerbs über und werden nicht zurückgesandt. Es wird deshalb empfohlen, eine Kopie zu behalten. Diese kann bei Unklarheiten zusammen mit den Lösungsbeispielen mit dem Fachlehrer/der Fachlehrerin durchgesehen werden.
• **Einsendeschluss** für die 1. Runde ist der **1. März 2012** (Datum des Poststempels). Verspätet abgesandte Arbeiten können nicht in das Korrekturverfahren einbezogen werden. *Einsendungen auf elektronischem Wege* sind nicht möglich. Über das Ergebnis werden alle Teilnehmer/innen im Juni 2012 informiert. Wer wissen möchte, ob seine Einsendung angekommen ist, kann ihr eine frankierte und an ihn selbst adressierte Postkarte beilegen. Senden Sie Ihre Bearbeitungen bitte ausreichend frankiert an:

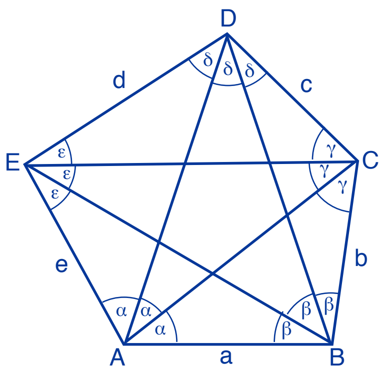
Bundeswettbewerb Mathematik
Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH
Kortrijker Straße 1
53177 Bonn

Lösungsbeispiel – *Aufgabe 3 der 1. Runde 2011*

Die Diagonalen eines konvexen Fünfecks teilen jeden seiner Innenwinkel in drei gleich große Teile.
Folgt hieraus, dass das Fünfeck regelmäßig ist?

Adrian Riekert, Klasse 9,
Johannes-Brahms-Schule,
Pinneberg

Lösung von Adrian Riekert



Die Winkel werden wie in der Zeichnung benannt. Nach dem Winkelsummensatz im Dreieck ABC gilt: $\gamma = 180° - \alpha - 3\beta$ und analog im Dreieck ABE: $\varepsilon = 180° - 3\alpha - \beta$.
Also gilt im Dreieck CDE:

$$\delta = \tfrac{1}{3}(180° - (180° - \alpha - 3\beta) - (180° - 3\alpha - \beta)) = \tfrac{1}{3}(4\alpha + 4\beta - 180°) = \tfrac{4}{3}(\alpha + \beta) - 60°$$

Andererseits gilt im Dreieck ABD: $\delta = 180° - 2(\alpha + \beta)$

Gleichsetzen ergibt: $\tfrac{4}{3}(\alpha + \beta) - 60° = 180° - 2(\alpha + \beta)$

Daraus folgt: $\tfrac{10}{3}(\alpha + \beta) = 240°$, also $\alpha + \beta = 72°$ und damit $\boldsymbol{\delta = 36°}$

Analog erhält man $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 36°$

Also haben alle Innenwinkel des Fünfecks die Größe 3 x 36° = 108°. Weiterhin gilt nach dem Basiswinkelsatz im Dreieck ABC: **a = b.** Analog erhält man **b = c = d = e.** Deshalb muss das Fünfeck tatsächlich regelmäßig sein.

Übungsmaterial

Die Aufgaben und Lösungsbeispiele aus früheren Wettbewerbsläufen können kostenlos gegen Einsendung eines adressierten und ausreichend frankierten Umschlags (DIN C4) von der Geschäftsstelle bezogen werden.

Bundeswettbewerb Mathematik
Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH
Kortrijker Straße 1 • 53177 Bonn
Tel.: (02 28) 9 59 15 - 20
E-Mail: info@bundeswettbewerb-mathematik.de
www.bundeswettbewerb-mathematik.de

P963215

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!