

Die Aufgaben der 2. Runde 2020

Aufgabe 1

Leo und Smilla finden 2020 Goldnuggets mit den Massen $1, 2, \dots, 2020$ Gramm, die sie nach folgender Regel auf eine rote und eine blaue Schatztruhe verteilen:

Zuerst wählt Leo eine der Schatztruhen und nennt Smilla die Farbe der Truhe. Anschließend wählt Smilla eines der noch nicht verteilten Nuggets und legt es in diese Truhe.

Dies wiederholen sie, bis alle Nuggets verteilt sind. Danach wählt Smilla eine der beiden Schatztruhen und bekommt alle Nuggets in dieser Truhe.

Wie viel Gramm Gold kann Smilla auf diese Weise mindestens für sich garantieren?



Aufgabe 2

Beweise: Es gibt keine rationalen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.



Aufgabe 3

Zwei Geraden m und n schneiden sich in genau einem Punkt P . Ein Punkt M bewegt sich auf m mit konstanter Geschwindigkeit, ein weiterer Punkt N bewegt sich auf n mit derselben Geschwindigkeit; dabei passieren sie beide den Punkt P , aber nicht gleichzeitig.

Beweise: Es gibt einen festen, von P verschiedenen Punkt Q so, dass die Punkte P, Q, M und N zu jedem Zeitpunkt auf einem gemeinsamen Kreis liegen.



Aufgabe 4

In jedem Feld einer Tabelle mit m Zeilen und n Spalten, wobei $m < n$ ist, steht eine nicht-negative reelle Zahl; dabei kommt in jeder Spalte mindestens eine positive Zahl vor.

Beweise: Es gibt ein Feld mit einer positiven Zahl derart, dass die Summe der Zahlen in der Zeile dieses Feldes größer ist als die Summe der Zahlen in der Spalte dieses Feldes.

