

# Aufgaben und Lösungen

## 1. Runde 2016

Über Kommentare und Ergänzungen zu diesen Lösungsbeispielen freuen wir uns!

» **KORREKTURKOMMISSION | KARL FEGERT**

» **BUNDESWETTBEWERB MATHEMATIK**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-20, Fax: (02 28) 9 59 15-29  
info@bundeswettbewerb-mathematik.de, www.bundeswettbewerb-mathematik.de

Stand: 7. Mai 2016

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium  
für Bildung  
und Forschung



STIFTERVERBAND



KULTUSMINISTER  
KONFERENZ



**Aufgabe 1:** Gegeben ist die mit 2016 Nullen geschriebene Zahl 101010...0101, in der sich die Ziffern 1 und 0 abwechseln.

Beweise, dass diese Zahl keine Primzahl ist.

**Bezeichnung:** Es sei

$Z_n$  := 10101...101 die Zahl, die mit  $n$  Nullen geschrieben wird und in der sich die Ziffern 1 und 0 abwechseln; die in der Aufgabe genannte Zahl ist dann  $Z_{2016}$ . Weiter sei

$E_{2k+1}$  := 1111...111 die Zahl, die mit genau  $2k+1$  Ziffern Eins geschrieben wird, und

$N_{2k}$  := 9090...9091 die Zahl, die mit  $k$  Ziffern 9 geschrieben wird und in der sich die Ziffern 9 und 0 abwechseln, wobei die letzte Ziffer 0 durch eine 1 ersetzt wird.

**1. Beweis** (Ansatz über Probieren, Grundschulmultiplikation): Mit dem Taschenrechner oder einer Faktorisiermaschine aus dem Internet betreiben wir Ideenfindung. Es ist

$$Z_2 = 10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 111 \cdot 91 = E_3 \cdot N_2,$$

$$Z_4 = 101010101 = 41 \cdot 271 \cdot 9091 = 11111 \cdot 9091 = E_5 \cdot N_4,$$

$$Z_6 = 1010101010101 = 239 \cdot 4649 \cdot 909091 = 1111111 \cdot 909091 = E_7 \cdot N_6,$$

was zur Vermutung führt, dass

$$Z_{2k} = E_{2k+1} \cdot N_{2k} \text{ für alle } k = 1, 2, 3, \dots, \text{ also insbesondere } Z_{2016} = E_{2017} \cdot N_{2016}.$$

Zum Nachweis der Richtigkeit dieser Vermutung multiplizieren wir  $N_{2k}$  und  $E_{2k+1}$  nach üblichem Grundschulschema; wobei wir allerdings je zwei Zeilen zu einer Zwischensumme (fettgedruckt) zusammenfassen:

$$\begin{array}{r}
 9090909090\dots909091 \quad \times \quad 111111111\dots11111 \\
 \hline
 9090909090\dots909091 \\
 9090909090\dots909091 \\
 \hline
 \mathbf{10000000000\dots000001} \\
 \\
 9090909090\dots909091 \\
 9090909090\dots909091 \\
 \hline
 \mathbf{10000000000\dots000001} \\
 \\
 9090909090\dots909091 \\
 9090909090\dots909091 \\
 \hline
 \mathbf{10000000000\dots000001} \\
 \\
 \dots \\
 \\
 \dots \\
 \\
 9090909090\dots909091 \\
 9090909090\dots909091 \\
 \hline
 \mathbf{10000000000\dots000001} \\
 \\
 9090909090\dots909091 \\
 9090909090\dots909091 \\
 \hline
 \mathbf{10000000000\dots000001} \\
 \hline
 101010101010\dots1010101001010101010\dots10101 \\
 \hline
 \mathbf{1010101010101010\dots1010101010101010\dots10101}
 \end{array}$$

In diesem Schema gibt es  $2k+1$  Zeilen, in denen die Ziffernblöcke 9090...9091 (je  $2k$  Ziffern) untereinander stehen, und zwar jeweils um eine Stelle versetzt. Von den ersten  $2k$  Zeilen addieren wir je zwei aufeinanderfolgende Zeilen zu einer Zwischensumme; dies ergibt die Ziffernblöcke 1000...001 mit je  $2k+2$  Ziffern. Bei der Addition dieser  $k$  Zwischensummen müssen wir keine "Überträge" berücksichtigen, es ergibt sich 1010...1010010101...0101, ein Ziffernblock, der mit  $k$  Zifferngruppen 10 beginnt, gefolgt von  $k$  Zifferngruppen 01, also ein Ziffernblock, der in der Mitte zwei Nullen nebeneinander hat (mit Wellenlinie unterstrichen). Die  $2k$  Ziffern 9090...9091 der letzten Zeile stehen dann derart unter dieser



Zahl, dass die erste 9 unter der ersten 1 der zweiten Zifferngruppe steht. Bei der Addition erhält man also schließlich  $Z_{2k}$ .

Für alle  $k \geq 1$  sind die beiden Faktoren  $E_{2017}$  und  $N_{2016}$  beide ganze Zahlen und beide größer als 1, also ist ihr Produkt keine Primzahl.

**Variante** (gleiche Rechnung, aber für Geübte übersichtlicher mit Summenformel): Es ist

$$\begin{aligned} E_{2k+1} \cdot N_{2k} &= \left( \sum_{i=0}^{2k} 10^i \right) \cdot \left( 1 + 90 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} (10)^{2i} \right) = \frac{10^{2k+1} - 1}{10 - 1} \cdot \left( 1 + 90 \cdot \frac{10^{2k} - 1}{10^2 - 1} \right) \\ &= \frac{10^{2k+1} - 1}{10 - 1} \cdot \left( 1 + \frac{10^{2k+1} - 10}{11} \right) = \frac{10^{2k+1} - 1}{10 - 1} \cdot \frac{10^{2k+1} + 1}{10 + 1} \\ &= \frac{(10^{2k+1})^2 - 1}{99} = \frac{(10^2)^{2k+1} - 1}{10^2 - 1} = \sum_{k=0}^{2k} (10^2)^k = Z_{2k}. \end{aligned}$$

**2. Beweis** ( $k$ -Quersumme): Zur Bildung der  $k$ -Quersumme einer Zahl  $Z$  teilen wir ihre Dezimaldarstellung von rechts in Blöcken zu je  $k$  Ziffern auf, deuten diese als Zahlen im Dezimalsystem und addieren sie. Dann gilt folgender Hilfssatz:

**HS:** Ist  $d$  ein Teiler von  $10^k - 1$ , dann lassen eine Zahl  $Z$  und ihre  $k$ -Quersumme bei Division durch  $d$  den gleichen Rest.

Beweis(skizze) des HS: Wenn  $d$  Teiler von  $10^k - 1$  ist, dann ist  $10^{k \cdot r} \equiv 1^r \equiv 1 \pmod{d}$  für alle nicht-negativen ganzzahligen  $r$ . Die Richtigkeit der Aussage des HS zeigen wir nun an einem Beispiel mit  $d = 11$ ,  $k = 2$  und der Zahl  $Z = 22034928$ ; dieses Beispiel kann leicht zu einem Beweis verallgemeinert werden:

$$22034928 = 22 \cdot 10^{2 \cdot 3} + 3 \cdot 10^{2 \cdot 2} + 49 \cdot 10^{2 \cdot 1} + 28 \equiv 22 + 3 + 49 + 28 \pmod{11}.$$

Nun können wir leicht zeigen, dass  $E_{2k+1}$  Teiler von  $Z_{2k}$  ist: Es ist  $9 \cdot E_{2k+1} = 10^{2k+1} - 1$ , also  $E_{2k+1}$  Teiler von  $10^{2k+1} - 1$ . Die ersten  $2k+1$  Ziffern von rechts in der Dezimaldarstellung der Zahl  $Z_{2k}$  sind 10101...101 (mit  $k$  Ziffern Nullen), danach kommen noch  $k$  Ziffern 101010...10 (mit  $k-1$  Ziffern 0). Also ist die  $2k+1$ -Quersumme von  $Z_{2k}$  die Zahl 111111...11 (mit  $2k+1$  Ziffern 1), also  $E_{2k+1}$ . Diese lässt offensichtlich bei Division durch  $E_{2k+1}$  den Rest 0; dies gilt nach HS auch für die Zahl  $Z_{2k}$ , dies war zu zeigen.

**Bemerkung:** Für  $d = 3$  und  $k = 1$  beschreibt der HS die übliche Quersummenregel für Division durch 3 oder 9; im Internet findet man mit dem Suchbegriff  $k$ -Quersumme viele verlässlichen Quellen für diesen Hilfssatz.

**3. Beweis** (Faktorisierung der Hilfszahl  $Z_{2016} \cdot 99$ ): Es ist

$$\begin{aligned} Z_{2016} \cdot 99 &= 10101010 \dots 101 \cdot 99 \\ &= 99 \ 99 \ 99 \ \dots \ 99 \ 99 && (2017 \text{ Gruppen von je } 2 \text{ Neunen}) \\ &= 999999 \dots 999 \ 999999 \dots 999 && (2 \text{ Gruppen von je } 2017 \text{ Neunen}) \\ &= 999999 \dots 999 \cdot 100000 \dots 001 && (2017 \text{ Neunen; } 2016 \text{ Nullen zw. zwei Einsen}) \\ &= 111111 \dots 111 \cdot 9 \cdot 909090 \dots 9091 \cdot 11. \end{aligned}$$

Division beider Seiten durch  $9 \cdot 11 = 99$  ergibt, dass  $Z_{2016} = 11111 \dots 111 \cdot 909090 \dots 9091$  das Produkt von zwei Zahlen, die beide größer als 1 sind; dies war zu zeigen.

**Variante:** Die Zahl  $Z_{2016}$  hat 2016 Nullen und 2017 Einsen, also 4033 Ziffern. Weiter ist nach bekannten

Rechenregeln  $0,\overline{10} = \frac{10}{99}$  und  $0,\overline{01} = \frac{1}{99}$ ; damit ist



$$Z_{2016} = 10^{4033} \cdot 0,\overline{10} - 0,\overline{01} = \frac{10^{4034}-1}{99} = \frac{10^{2017}-1}{9} \cdot \frac{10^{2017}+1}{11}.$$

Der Zähler des ersten Bruches ist die Zahl, die mit 2017 Neunen geschrieben wird, der erste Bruch ist also kürzbar und stellt die Zahl 11...1 mit 2017 Einsen dar. Der Zähler des zweiten Bruches hat – da 2017 ungerade ist – die alternierende Quersumme  $1 - 1 = 0$ , ist also durch 11 teilbar. Damit ist der zweite Bruch ebenfalls kürzbar. Damit ist  $Z_{2016}$  das Produkt von zwei ganzen Zahlen, die beide offensichtlich größer als 1 sind, also ist  $Z_{2016}$  keine Primzahl.

**4. Beweis** (Faktorisierung der Hilfszahl  $Z_{2016} \cdot 11$ ): Die Zahl  $Z_{2016}$  hat 2017 Ziffern 1 und 2016 Ziffern 0. Schreibt man sie um eine Position versetzt untereinander und addiert, so erhält man die Zahl  $Z_{2016} \cdot 11 = 111 \dots 111$  mit 4034 Ziffern 1. Da ihre Stellenzahl eine gerade Zahl ist, kann man sie leicht faktorisieren:

$$11 \cdot Z_{2016} = \underbrace{111 \dots 111}_{4034} = \underbrace{10000 \dots 0001}_{2017} \cdot \underbrace{111 \dots 111}_{2017}$$

Die linke Seite ist Vielfaches der Primzahl 11, also enthält die Primfaktorzerlegung mindestens eines der beiden Faktoren rechts ebenfalls die Primzahl 11, und damit ist der andere Faktor auch Teiler von  $Z_{2016}$ . Dieser ist sicher größer als 1 und kleiner als  $Z_{2016}$ ; dies war zu zeigen.

**Bemerkung:** Um den Beweis zu führen, ist die Kenntnis, welcher der beiden Faktoren durch 11 teilbar ist, nicht nötig. Man kann diesen Faktor aber leicht mit Hilfe der alternierenden Quersumme bestimmen: Der erste Faktor hat die AQS  $1 - 0 + 0 - \dots + 0 - 1 = 0$ , ist also durch 11 teilbar. Möglich ist auch, dies durch konkrete Division nachzuweisen, man erhält dann zusätzlich die konkrete Faktorisierung  $Z_{2k} = E_{2k+1} \cdot N_{2k}$ .

**5. Beweis** (dreizeilig, mit Summenformel für die geometrische Reihe): Es ist

$$Z_{2016} = \sum_{k=0}^{2016} (10^2)^k = \frac{(10^2)^{2017} - 1}{100 - 1} = \frac{(10^{2017})^2 - 1}{9 \cdot 11} = \frac{10^{2017} - 1}{9} \cdot \frac{10^{2017} + 1}{11} = \sum_{i=0}^{2016} (10)^i \cdot \sum_{i=0}^{2016} (-10)^i.$$

Beide Faktoren sind Summen von natürlichen Zahlen und damit selbst natürliche Zahlen. Der erste Faktor ist sicher größer als 1 und kleiner als  $Z_{2016}$ . Damit ist  $Z_{2016}$  sicher keine Primzahl.

**Bemerkungen:** Wesentliche Voraussetzung in allen Beweisen ist, dass 2016 eine gerade Zahl ist; man erhält, dass  $Z_{2k}$  immer durch  $E_k$  teilbar ist. Für ungerade Zahlen ist  $Z_n$  stets durch  $Z_1$  teilbar, also sind alle  $Z_n$  für  $n \geq 2$  keine Primzahl. Konkretes Probieren ergibt:  $Z_1 = 101$  ist einzige Primzahl unter den  $Z_n$ .

Wesentliche Voraussetzung für die Schwierigkeit ist, dass sich mit einfachen Teilbarkeitsregeln (Quersumme, alternierende QS, Tausenderrest QS o.ä. keine einfachen Teiler wie 3, 11, 1001 o.ä. finden lassen.

Über die Internetseite <http://www.factordb.com/> gibt man im Menue "Search" den Ausdruck  $(10^{4034} - 1)/99$  ein und erhält innerhalb weniger Sekunden die Faktorisierung

$$Z_{2016} = 80681 \cdot 129089 \cdot 5058637 \cdot 2311391715047 \cdot 16312925451211 \cdot 148445520337769 \cdot 45764260260272632237 \cdot 7484655805 \dots 98_{<3956>};$$

angeblich sind die ersten 7 Faktoren prim, der letzten Faktor mit 3956 Ziffer sei "composite, no factors known".

In diesem Zusammenhang weisen wir auf die Teilnahmebedingungen hin: "Gegen die Verwendung eines Computers oder eines Taschenrechners zur Ideenfindung bzw. Rechnungskontrolle ist nichts einzuwenden, doch müssen die für den jeweiligen Nachweis wesentlichen Schritte und Resultate ohne diese Hilfsmittel nachvollziehbar und überprüfbar sein." Eine Angabe dieser Faktorisierung (auch mit Quellenangabe) stellt also ohne weitere Überlegungen keine Lösung der Aufgabe dar.

Die Kenntnis des Faktors 80681 darf und kann aber folgendermaßen genutzt werden: Mit einigem Aufwand zeigt man, dass  $10^{4034} \equiv 1 \pmod{80681}$  ist (mit Tricks geht das mit ca. 15 Multiplikationen von max. fünfstelligen Zahlen und anschließender Divisionen mit Restbestimmung); man weiß dann, dass  $10^{4034} - 1$  durch 80681 teilbar ist). Der Nachweis, dass weder 9 noch 11 Teiler von 80681 ist, führt schließlich zu einer möglichen Lösung.



**Aufgabe 2:** Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$  mit Flächeninhalt 1. Anja und Bernd spielen folgendes Spiel: Anja wählt einen Punkt  $X$  auf der Seite  $BC$ , dann wählt Bernd einen Punkt  $Y$  auf der Seite  $CA$  und schließlich Anja einen Punkt  $Z$  auf der Seite  $AB$ ; dabei dürfen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  keine Eckpunkte des Dreiecks  $ABC$  sein. Anja versucht hierbei, den Flächeninhalt des Dreiecks  $XYZ$  möglichst groß zu machen, Bernd dagegen möchte diesen Flächeninhalt möglichst klein halten.

Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck  $XYZ$  am Ende des Spiels, wenn beide optimal spielen?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen!

**Antwort:** Wenn beide optimal spielen, hat das Dreieck  $XYZ$  am Ende des Spiels den Flächeninhalt  $1/4$ .

**Bezeichnungen:** Die Mittelpunkte der Seiten  $BC$ ,  $CA$  und  $AB$  seien mit  $M_a$ ,  $M_b$  bzw.  $M_c$  bezeichnet, der Flächeninhalt des Dreiecks  $XYZ$  mit  $|XYZ|$ .

**1. Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass Anja stets so spielen kann, dass  $|XYZ| \geq 1/4$ , und dass Bernd stets so spielen kann, dass  $|XYZ| \leq 1/4$ .

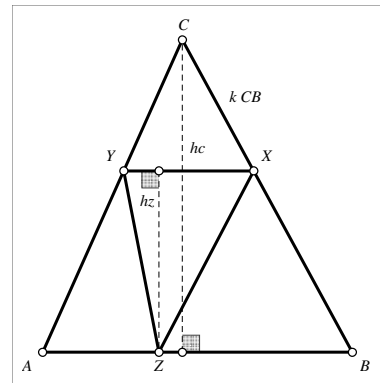
Wenn Anja im ersten Zug  $X = M_a$  und in ihrem zweiten Zug  $Z = M_c$  wählt (dies kann sie stets unabhängig von Bernds erstem Zug machen), so ist  $XZ \parallel AC$ . Nach bekannten Sätzen über den Flächeninhalt von Dreiecken hat dann  $|XYZ|$  für jede Lage von  $Y$  auf  $AC$  den gleichen Wert, insbesondere ist  $|XYZ| = |XM_bZ| = |M_aM_bM_c| = 1/4$ . Anja kann also stets so spielen, dass  $|XYZ| \geq 1/4$ .

Wenn Bernd  $Y$  so wählt, dass  $XY \parallel AB$ , dann ist mit Strahlensatz (Zentrum  $C$ , Parallelen  $XY$  und  $AB$ ) für ein geeignetes  $k \in ]0;1[$

$$k = \frac{CX}{CB} = \frac{XY}{BA} = \frac{h_c - h_z}{h_c}, \text{ also}$$

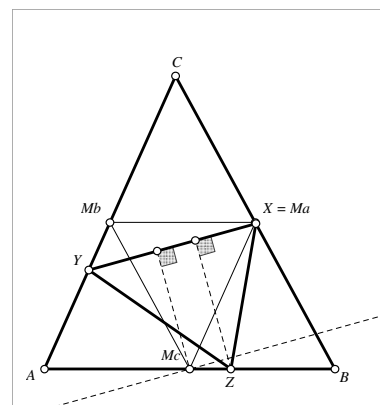
$$\begin{aligned} |XYZ| &= \frac{1}{2} \cdot \overline{XY} \cdot h_z = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \overline{AB} \cdot (1 - k) \cdot h_c \\ &= k \cdot (1 - k) \cdot |ABC| = k \cdot (1 - k). \end{aligned}$$

Schulübliche Extremwertbestimmung bei quadratischen Funktionen mittels quadratischer Ergänzung ergibt  $k \cdot (1 - k) = -k^2 + k = -(k - 1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4$ . Bernd kann also stets so spielen, dass  $|XYZ| \geq 1/4$ .



**Variante:** Anjas optimaler erster Zug ist die Wahl  $X = M_a$ : Sie kann dann nämlich – wie oben gezeigt – erzwingen, dass  $|XYZ| \geq 1/4$ , während Bernd für jede andere Wahl von Anja erzwingen kann, dass  $|XYZ| < 1/4$ : Er wählt  $Y$  so, dass  $XY \parallel AB$ , dann ist mit obigen Bezeichnungen  $|XYZ| = k \cdot (1 - k) \leq 1/4$ , wobei Gleichheit nur dann erreicht wird, wenn  $k = 1/2$ , d.h. wenn  $X = M_a$ .

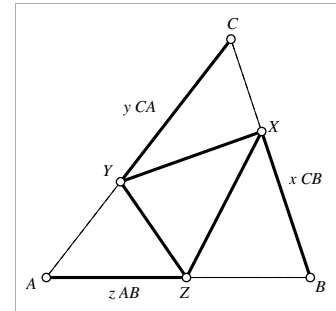
Nach Voraussetzung spielen Bernd und Anja beide optimal, es genügt also, Bernds optimale Antwort auf Anjas optimalen ersten Zug  $X = M_a$  zu bestimmen. Dieser ist die Wahl  $Y = M_b$ : Dann ist nämlich auch  $XY \parallel AB$  und für jede Lage von  $Z$  auf  $AB$  hat  $|XYZ|$  den gleichen Wert, insbesondere ist  $|XYZ| = |M_aM_bM_c| = 1/4$ . Wählt er dagegen  $Y \neq M_b$ , kann Anja immer einen Punkt  $Z$  mit  $|XYZ| > 1/4$  finden: Liegt  $Y$  näher an  $A$  als an  $C$ , so wählt sie einen Punkt  $Z$  auf der Strecke  $M_cB$ , d.h. näher an  $B$  als an  $A$ . Dann liegen die Strecke  $M_cB$  und der Punkt  $Y$  in verschiedenen Halbebenen bez. der Parallelen zu  $XY$  durch  $M_c$ , d.h. das Dreieck  $XYZ$  hat mit dem Dreieck  $XYM_c$  die Grundseite  $XY$  gemeinsam, aber eine größere Höhe, also ist  $|XYZ| > |XYM_c| = |XM_bM_c| = 1/4$ . Liegt  $Y$  näher an  $C$  als an  $A$ , so wählt Anja einen Punkt  $Z$  näher an  $A$  als an  $B$ , und mit analoger Begründung erhält man erneut  $|XYZ| > 1/4$ .





**2. Beweis:** Wenn die Punkte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  auf den Dreieckseiten  $BC$ ,  $CA$  bzw.  $AB$  liegen, dann gibt es umkehrbar eindeutig bestimmte Zahlen  $x$ ,  $y$  und  $z$ , wobei  $x, y, z \in ]0; 1[$ , sodass  $\overline{BX} = x \cdot \overline{BC}$ ,  $\overline{CY} = y \cdot \overline{CA}$  und  $\overline{AZ} = z \cdot \overline{AB}$ ; der Ausschluss von 0 und 1 bewirkt, dass die Punkte nicht Eckpunkte des Dreiecks sein können.

Da bei festem Innenwinkel der Flächeninhalt eines Dreiecks proportional zur Länge jeder der beiden anliegenden Seiten ist, können wir die Flächeninhalte der Teildreiecke in den Ecken abhängig von  $x$ ,  $y$  und  $z$  berechnen, es gilt z.B.  $|CYX| = (1-x) \cdot y \cdot |ABC|$ . Mit  $|ABC| = 1$  ist also



$$\begin{aligned} |XYZ| &= |ABC| - |CXI| - |AZY| - |BXZ| \\ &= 1 - (1-x) \cdot y - (1-y) \cdot z - (1-z) \cdot x \\ &= 1 + xy + yz + zx - x - y - z \quad (\text{oder auch } |XYZ| = (1-x)(1-y)(1-z) + xyz). \end{aligned}$$

Damit können wir das Spiel vom geometrischen Modell lösen und algebraisch behandeln: Anja wählt eine Zahl  $x$ , Bernd eine Zahl  $y$  und wiederum Anja eine Zahl  $z$  (jeweils aus dem Intervall  $]0; 1[$ ); dabei versucht Anja den Wert von  $|XYZ|$  möglichst groß zu machen, Bernd versucht,  $|XYZ|$  möglichst klein zu machen. Wir können nun zeigen:

(1) Bernd kann erreichen, dass – unabhängig davon, welchen Wert Anja im ersten Zug für  $x$  und im letzten Zug für  $z$  wählt – stets  $|XYZ| \leq 1/4$ :

Er wählt  $y = (1-x)$ , d.h. den Punkt  $Y$  so, dass  $XY \parallel AB$ . Dann ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} |XYZ| &= 1 + x(1-x) + (1-x)z + zx - x - (1-x) - z \\ &= 1 + x - x^2 + z - xz + zx - x - 1 + x - z = -x^2 + x + (1/4 - 1/4) = 1/4 - (x - 1/2)^2 \\ &\leq 1/4, \end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn  $x = 1/2$ , d.h. wenn Anja den Punkt  $X$  als Mittelpunkt der Strecke  $BC$  wählt.

(2) Anja kann erreichen, dass der Termwert – unabhängig davon, welchen Wert Bernd für  $y$  wählt – stets  $1/4$  oder größer ist:

Hierzu wählt sie in ihrem ersten Zug  $x = 1/2$ , d.h. den Punkt  $X$  als Mittelpunkt der Strecke  $BC$ , und im letzten Zug  $z = y$ , dann ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} |XYZ| &= 1 + xy + yz + zx - x - y - z = 1 + 1/2 y + yz + 1/2 z - 1/2 - y - z \\ &= 1/2(1-y) + z(y - 1/2) = y^2 - y + 1/4 + 1/4 = 1/4 + (y - 1/2)^2 \\ &\geq 1/4, \end{aligned}$$

wobei Gleichheit genau dann vorkommt, wenn  $y = 1/2$ .

**Bemerkungen:** Anjas Wahl  $z = y$  im letzten Zug ist hinreichend, aber nicht notwendig, um  $|XYZ| \geq 1/4$  zu erreichen. Wenn Bernd  $y > 1/2$  wählt – d.h. den Punkt  $Y$  näher bei  $A$  als bei  $C$  wählt –, führt jedes  $z > 1/2$  – d.h. jede Wahl von  $Z$  näher bei  $B$  als bei  $A$  – zu  $|XYZ| > 1/4$ ; und wenn  $y < 1/2$ , führt jedes  $z < 1/2$  zu  $|XYZ| > 1/4$ . Weiter führt sowohl  $y = 1/2$  bei beliebigem  $z$  als auch  $z = 1/2$  bei beliebigem  $y$  zu  $|XYZ| = 1/4$ .

**3. Beweis:** Nach Vorgabe eines Punktes  $X$  auf der Seite  $BC$  sei  $Y_x$  der Punkt auf  $AC$  mit  $XY_x \parallel AB$  und  $Z_x$  der Punkt auf  $AB$  mit  $XZ_x \parallel AC$ . Wegen der angegebenen Parallelitäten ist  $|XY_x Z_x| = |XYZ_x| = |XY_x Z|$  für alle  $Y$  auf  $AC$  und alle  $Z$  auf  $AB$ . Also können sowohl Anja durch die Wahl von  $Z = Z_x$  als auch Bernd durch die Wahl von  $Y = Y_x$  erreichen, dass  $|XYZ| = |XY_x Z_x|$ . Wenn nun Anja  $X = M_a$  wählt, ist  $|XY_x Z_x| = 1/4$ , bei jeder anderen Wahl ist  $|XY_x Z_x| < 1/4$  (vgl. 1. Beweis). Hieraus folgt sofort die Behauptung.



**Aufgabe 3:** Auf einem Kreis liegen die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  in dieser Reihenfolge. Die Sehnen  $AC$  und  $BD$  schneiden sich im Punkt  $P$ , die Senkrechten auf  $AC$  im Punkt  $C$  bzw. auf  $BD$  im Punkt  $D$  schneiden sich im Punkt  $Q$ .

Beweise, dass die Geraden  $AB$  und  $PQ$  senkrecht aufeinander stehen.

**Vorbemerkung:** Zu einer vollständigen Lösung bei einer Geometrieaufgabe gehört immer eine Überlegung, inwieweit Argumentationen bei verschiedenen Lagebeziehungen gültig bleiben. Bei der hier vorgestellten Aufgabe müssen z.B. die Fälle  $\angle BAC < 90^\circ$  und  $\angle BAC > 90^\circ$  je nach Beweisansatz getrennt behandelt werden. In der ersten Runde des diesjährigen Wettbewerbs haben wir bei dieser Aufgabe ein Fehlen solcher Überlegungen nicht als preismindernd gewertet.

**1. Beweis** (Winkeljagd): Da die Anordnung der Punkte  $A, B, C$  und  $D$  auf dem Kreis vorgegeben ist, liegt der Punkt  $P$  stets im Innern des Kreises und auch nicht auf der Geraden  $AB$ , d.h. das Dreieck  $ABP$  ist nicht entartet.

Nebenstehende Figur bezieht sich auf eine Konfiguration, bei der  $\angle BAC < 90^\circ$  und  $\angle DBA < 90^\circ$ . Nach Voraussetzung ist  $\angle PDQ = \angle QCP = 90^\circ$ , also liegen die Punkte  $D, P, C$  und  $Q$  auf dem Thaleskreis über der Strecke  $PQ$ .

Sei  $R$  der Schnittpunkt von  $QP$  mit  $AB$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \angle RPB &= \angle QPD \text{ (Scheitelwinkel) und} \\ \angle DQP &= \angle DCP \text{ (Umfangswinkel über der Sehne } DP) \\ &= \angle DCA \text{ (weil } P \text{ auf } AC \text{ liegt)} \\ &= \angle DBA \text{ (Umfangswinkel über der Sehne } DA) \\ &= \angle PBR \text{ (weil } R \text{ auf der Geraden } AB \text{ liegt)}. \end{aligned}$$

Damit sind die Dreiecke  $DPQ$  und  $RPB$  ähnlich, insbesondere ist  $\angle BRP = \angle QDP = 90^\circ$ .

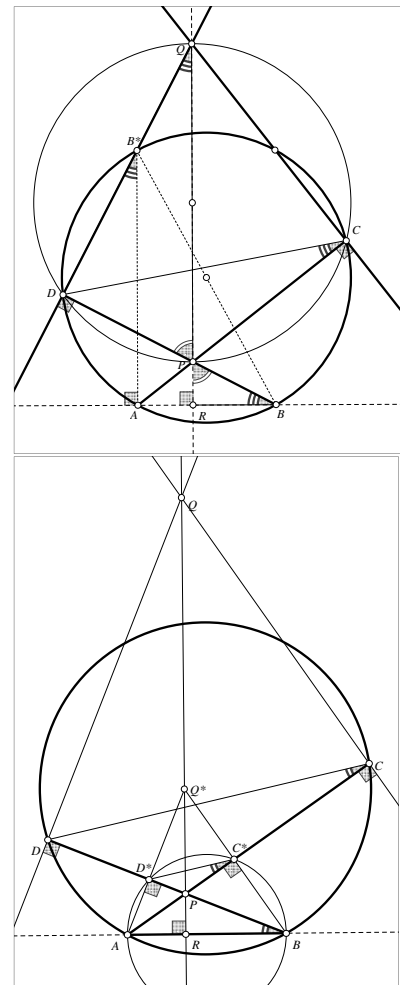
Die Beweisführung ist auch gültig, wenn  $\angle BAC > 90^\circ$  oder  $\angle DBA > 90^\circ$  (vgl. 2. Figur im 2. Beweis, ergänze dort den Kreis  $QCDP$ ). Wenn  $\angle BAC = 90^\circ$ , dann ist  $Q = C$ , also  $QP = CA \perp AB$  und es gibt nichts mehr zu beweisen. Analoges gilt im Fall  $\angle DBA = 90^\circ$ .

**Variante** (knappe Formulierung): Sei  $BB^*$  Durchmesser. Nach Satz von Thales ist  $\angle BAB^* = 90^\circ$ . Ferner ist  $\angle DB^*A = \angle DCA = \angle DCP = \angle DQP$ , also  $QP \parallel B^*A \perp AB$ .

**2. Beweis** (abbildungsgeometrisch): Falls  $\angle BAC = 90^\circ$ , fallen die Punkte  $C$  und  $Q$  zusammen und somit auch die Geraden  $AQ$  und  $AC$ ; dann ist nichts mehr zu zeigen. Analoges gilt für  $\angle DBA = 90^\circ$ .

Nebenstehende Figur unterstützt die Beweisführung für den Fall  $\angle BAC < 90^\circ$  und auch  $\angle DBA < 90^\circ$ ; der Beweis ist aber auch für die Fälle  $\angle BAC > 90^\circ$  oder  $\angle DBA > 90^\circ$  gültig (vgl. 2. Figur). Sei  $R$  der Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf die Gerade  $AB$ ; es genügt dann zu zeigen, dass  $Q$  auf der Geraden  $PR$  liegt.

Der Fußpunkt des Lotes von  $A$  auf  $PB$  sei  $D^*$  und der Fußpunkt des Lotes von  $B$  auf  $AP$  sei  $C^*$ . Diese beiden Lote schneiden sich in einem Punkt, den wir  $Q^*$  nennen (die Existenz dieses Punktes ist sichergestellt, weil sich die jeweiligen Parallelen durch  $D$  bzw.  $C$  nach Voraussetzung in  $Q$  schneiden). Dann sind die Geraden  $BP$  und  $AP$  Höhen im Dreieck  $ABQ^*$ , insbesondere ist  $P$  Höhenschnittpunkt. Hieraus folgt, dass  $Q^*P$  ebenfalls Höhe in diesem Dreieck ist; damit ist  $R$  Höhenfußpunkt.

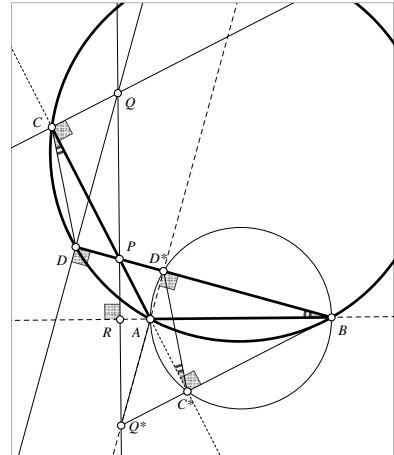






Nach dem Satz von Thales liegen die Punkte  $C^*$  und  $D^*$  auf dem Thaleskreis über Strecke  $AB$ ; die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  liegen nach Voraussetzung auf einem Kreis. Damit ist nach Umfangswinkelsatz  $\angle D^*C^*A = \angle D^*BA = \angle DBA = \angle DCA$ ; es ist also  $D^*C^* \parallel DC$ .

Schließlich unterwerfen wir das Viereck  $D^*PC^*Q^*$  derjenigen zentrischen Streckung mit Zentrum  $P$ , die den Punkt  $C^*$  auf den Punkt  $C$  abbildet und damit auch die Gerade  $BQ^*$  auf das Lot zu  $AC$  durch  $C$ . Nach bekannten Grundkonstruktionen ist bei dieser Abbildung das Bild von  $D^*$  der Schnittpunkt der Geraden  $BP$  mit der Parallelen zu  $D^*C^*$  durch  $C$ , also der Geraden  $DC$ . Also ist das Bild der Geraden  $D^*Q^*$  das Lot auf  $BD$  durch  $D$  und schließlich der Punkt  $Q$  das Bild von  $Q^*$ . Insbesondere liegt dann  $Q$  auf  $PQ^*$  und damit auf  $PR$ ; dies war zu zeigen.



**Bemerkung:** Anstatt dem Halbkreis über  $AB$  kann man auch den Halbkreis über  $A'B'$  verwenden, wobei  $A'$  der Schnittpunkt von  $AC$  mit  $DQ$  ist und  $B'$  der Schnittpunkt von  $BD$  mit  $QC$ . Dann wird keine zentrische Streckung benötigt, es genügt der Hinweis, dass  $P$  Höhenschnittpunkt im Dreieck  $A'B'Q$  ist zusammen mit dem Nachweis, dass  $AB \parallel A'B'$ , *cuius figuram mirabilem hanc marginis exiguitas non caperet...*

**3.Beweis** (mit Vektoren): Wir wählen  $P$  als Ursprung eines Koordinatensystems; wie üblich wird jeder Punkt  $X$  mit seinem Ortsvektor  $\vec{PX}$  identifiziert und mit  $\vec{x}$  bezeichnet.

Der Punkt  $P$  existiert, weil  $A, B, C$  und  $D$  in dieser Reihenfolge auf dem Kreis liegen; und  $P$  liegt im Innern des Kreises und damit sowohl zwischen  $A$  und  $C$  als auch zwischen  $B$  und  $D$ . Damit ist  $\vec{c} = \lambda \vec{a}$  und  $\vec{d} = \mu \vec{b}$  für geeignete negative  $\lambda$  und  $\mu$ . Weiter gilt nach Sehensatz  $\vec{PA} \cdot \vec{PC} = \vec{PB} \cdot \vec{PD}$ , also  $\sqrt{a^{-2}} \cdot |\lambda| \sqrt{a^{-2}} = \sqrt{b^{-2}} \cdot |\mu| \sqrt{b^{-2}}$ , was sich – weil  $\lambda$  und  $\mu$  das gleiche Vorzeichen haben und  $a^{-2}$  und  $b^{-2}$  beide positiv sind – zu  $\lambda a^{-2} = \mu b^{-2}$ , also  $\lambda a^{-2} - \mu b^{-2} = 0$  vereinfacht.

Weil  $Q$  (dessen Existenz übrigens sicher ist) auf dem Lot auf  $AC$  durch  $C$  liegt, ist  $(\vec{q} - \lambda \vec{a}) \circ \vec{a} = 0$ ; und weil  $Q$  auch auf dem Lot auf  $BD$  durch  $D$  liegt, ist auch  $(\vec{q} - \mu \vec{b}) \circ \vec{b} = 0$ . Gleichsetzen und Umformen führt über  $(\vec{q} - \lambda \vec{a}) \circ \vec{a} = (\vec{q} - \mu \vec{b}) \circ \vec{b}$  zu  $\vec{q}(\vec{b} - \vec{a}) = \lambda \vec{a}^2 - \mu \vec{b}^2 = 0$ . Da weder  $\vec{q} = \vec{0}$  noch  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ , ist dies gleichbedeutend mit  $QP \perp AB$ .

**Bemerkung:** Seien  $A^*$  und  $B^*$  die Bilder von  $A$  und  $B$  bei Spiegelung am Mittelpunkt des Kreises. Dann geht nach Satz von Thales die Senkrechte auf  $AC$  durch  $C$  durch  $A^*$ , die Senkrechte auf  $BD$  durch  $D$  durch  $B^*$ . Dann gilt nach Vertauschen der Bezeichnungen für  $P$  und  $Q$  die gleiche Aussage für das Kreisviereck  $A^*B^*DC$ . Diese Dualität gibt Ansätze für weitere Aussagen.





**Aufgabe 4:** In einer Klasse sind 33 Kinder. Jedes Kind schreibt an die Tafel, wie viele andere Kinder in der Klasse den gleichen Vornamen tragen wie es selbst. Danach schreibt jedes Kind an die Tafel, wie viele andere Kinder in der Klasse den gleichen Nachnamen haben wie es selbst. Als sie fertig sind, kommt unter den 66 Zahlen an der Tafel jede der Zahlen 0, 1, 2, ..., 10 mindestens einmal vor.

Beweise, dass in der Klasse mindestens zwei Kinder den gleichen Vor- und Nachnamen tragen.

Anmerkung: In dieser Klasse hat jedes Kind genau einen Vornamen und genau einen Nachnamen.

**Bezeichnungen:** Eine Klasse heiße *Zehnerklasse*, wenn bei einer Beschriftung der Tafel mit Zahlen nach obiger Vorgabe jede der Zahlen 0, 1, 2, ..., 10 mindestens einmal an der Tafel steht. Eine Klasse heiße *doppelfrei*, wenn keine zwei Kinder gleichen Vornamen und gleichen Nachnamen haben.

Den Begriff "Name" verwenden wir als Oberbegriff für "Vorname" und "Nachname".

**1. Beweis:** Wenn ein Kind eine Zahl  $x \in \{0, 1, \dots, 10\}$  an die Tafel schreibt, dann gibt es insgesamt genau  $x + 1$  Kinder mit diesem Namen (es ist zunächst unerheblich, ob dies ein Vor- oder Nachname ist). Aus der Voraussetzung der Aufgabenstellung folgt also, dass jede Zahl  $x$  mindestens  $(x + 1)$  Mal an der Tafel steht, also stehen mindestens  $1 + 2 + 3 + \dots + 11 = 11 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 66$  Zahlen an der Tafel; und da die 33 Kinder genau 66 Zahlen an der Tafel schreiben, steht jede Zahl  $x$  sogar genau  $x + 1$  Mal an der Tafel.

Hieraus folgern wir, dass es insgesamt genau 11 verschiedene (Vor- oder Nach-)Namen gibt und dass es zu zwei verschiedenen Namen stets verschiedene Anzahlen von Kindern gibt, die diesen Namen tragen.

Nun betrachten wir den Namen, den 11 Kinder tragen, o.B.d.A. sei dies der Nachname ELF. Jedes der 11 Kinder mit diesem Nachnamen hat einen Vornamen, und dieser kann nur ein Vorname aus der Menge der 10 anderen Namen sein. Nach Schubfachprinzip haben dann mindestens zwei der Kinder mit Nachnamen ELF den gleichen Vornamen, das war zu zeigen.

**2. Beweis** (mit Verschärfung der Aussage): Wir werden zeigen, dass es in der Klasse mindestens 5 Kinder gibt, bei denen Namensgleichheit mit mindestens einem anderen Kind in der Klasse gegeben ist.

Eine Menge Kinder, die alle Kinder mit einem gleichen (Vor- oder Nach-)Namen enthält, nennen wir "Clique". Nach obiger Argumentation gibt es genau 11 Cliques, jeder Vorname und jeder Nachname definiert eine Clique, zwei verschiedenen Cliques haben eine verschiedene Anzahl von Kindern und jede dieser Anzahlen ist eine der Zahlen aus  $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ .

Fasst man nun alle durch Vornamen definierten Cliques zusammen, so ist die Gesamtzahl der Kinder in diesen Cliques 33. Da in den drei größten Cliques zusammen höchstens  $11 + 10 + 9 = 30 < 33$  Kinder sind, gibt es in der Klasse mindestens 4 durch Vornamen definierte Cliques, also auch höchstens  $11 - 4 = 7$  durch Nachnamen definierte Cliques. Entsprechendes gilt nach Vertauschen der Begriffe Vor- und Nachname.

Nun betrachten wir die 11 Kinder der größten Clique, o.B.d.A. seien dies die Kinder mit dem gemeinsamen Nachnamen ELF. Jedes dieser 11 Kinder gehört auch einer der maximal 7 durch Vornamen definierten Cliques an. Nach Schubfachprinzip gibt es unter diesen 11 Kindern mindestens 4 Kinder (also nicht nur eines, wie in der Aufgabenstellung behauptet), die neben dem gemeinsamen Nachnamen ELF auch einen Vornamen der übrigen 7 Kinder tragen.

Wenn man sich diese Situation konkret mit Schubladen = Vornamen vorstellt, dann sieht man, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, je nach Zuteilung dieser 4 Kinder auf die Vornamen: Entweder gibt es einen Vornamen, den dann 5 Kinder tragen, oder zwei Vornamen, den jeweils 4 bzw. 2 Kinder tragen (oder 3 und 3), oder drei Vornamen, den 2 bzw. 2 bzw. 3 Kinder tragen, oder 4 Vornamen, den jeweils 2 Kinder tragen. Von Namensgleichheit sind also mindestens 5 Kinder betroffen, nämlich im 1. Fall; in den anderen Fllen sind es sogar mindestens 6 bzw. 7 bzw. 8.



**3. Beweis** (ähnliche Argumentation, die aber Grundlagen für eine weitere schärfere Aussage legt): Wir betrachten eine doppelfreie Zehnerklasse mit  $33 + m$  Kindern,  $m$  ganz. Es genügt zu zeigen, dass dann  $m \geq 1$  ist.

Jede der 11 Zahlen  $0, 1, 2, \dots, 10$  an der Tafel steht für einen Namen und gibt gleichzeitig (nach Addition von 1) an, wie häufig dieser Name bei den Kindern vorkommt. (Evtl. gibt es mehrere Namen, die jeweils gleich häufig vorkommen.) Wir können also 11 Namen auswählen und so mit  $b_1, b_2, \dots, b_{11}$  bezeichnen, dass jedes  $b_i$  Name von genau  $i$  Kindern der Klasse ist ( $i = 1, 2, 3, \dots, 11$ ). Diese 11 Namen nennen wir *relevant*, alle anderen *irrelevant*. O.B.d.A. sei  $b_{11}$  ein Nachname, ferner sei  $v$  die Anzahl der relevanten Vornamen unter den  $b_i$ , dann ist  $0 \leq v \leq 10$  und  $11 - v$  die Anzahl der relevanten Nachnamen.

Wir betrachten eine Klassenliste einer Zehnerklasse, in der die Kinder mit Vor- und Nachnamen aufgelistet sind. Da jedes der  $33 + m$  Kinder genau einen Vornamen und genau einen Nachnamen hat, steht in der Liste an  $2 \cdot (33 + m)$  Stellen ein Name, dabei steht an genau  $1 + 2 + \dots + 11 = 66$  Stellen einer der 11 relevanten Namen und an genau  $2m$  anderen Stellen ein irrelevanter Name. Hieraus schließen wir, dass es mindestens  $m$  und höchstens  $2m$  Kinder gibt, bei denen wenigstens einer der beiden Namen irrelevant ist.

Nun betrachten wir die 11 Kinder mit dem Nachnamen  $b_{11}$ . Da es keine zwei Kinder mit gleichem Vornamen und gleichem Nachnamen gibt, kommen in dieser Gruppe 11 verschiedene Vornamen vor. Es gibt nur  $v \leq 10$  relevante Vornamen, d.h. mindestens ein Vorname der 11 Kinder ist irrelevant. Also ist  $m \geq 11 - v \geq 11 - 10 = 1$ , dies war zu zeigen.

**4. Beweis:** Wir zeigen, dass 44 die kleinste Kinderzahl ist, für die eine Zehnerklasse doppelfrei sein kann. Damit bleibt die Aussage in der Aufgabe gültig, wenn wir die Zahl 33 durch die Zahl 43 ersetzen; und 43 ist die größte Zahl mit dieser Eigenschaft.

Eine mögliche Namensverteilung in einer doppelfreien Zehnerklasse mit 44 Schülern zeigt die nebenstehende Matrix. (Ein Kreuz in der Zelle  $(v_i|n_j)$  steht für einen Schüler mit dem Vornamen  $v_i$  und dem Nachnamen  $n_j$ .)

		n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9	n10	n11	
v1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	b11
v2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		b10
v3	x	x	x	x	x								b5
v4	x	x	x	x									b4
v5	x	x	x										b3
v6	x	x											b2
v7	x												b1
v8	x	x	x	x									
v9	x	x	x	x									
v10													
v11													
		b9	b8	b7	b6								

Zur Abschätzung nach unten betrachten wir eine doppelfreie Zehnerklasse mit  $K$  Kindern. Wir übernehmen vom 2. Beweis den Begriff der relevanten Vor- und Nachnamen und ihre Bezeichnung mit  $b_1, \dots, b_{11}$ .

Wenn man ein Kind, bei dem sowohl Vorname als auch Nachname irrelevant ist, aus der Klasse entfernt, so bleibt die Zehnerklasse erhalten. Da wir eine Aussage über die Mindestanzahl von Kindern in der Zehnerklasse treffen möchten, können wir o.B.d.A. annehmen, dass bei jedem Kind wenigstens einer von Vor- und Nachname relevant ist.

In dieser Klasse zählen wir die Kinder, die wenigstens einen der sieben Namen  $b_5, b_6, \dots, b_{11}$  tragen (darunter  $v$  Vornamen und  $7 - v$  Nachnamen), auf folgende Weise: Wir schreiben eine Liste mit Vor- und Nachnamen und zählen, an wie vielen Stellen ein relevanter Name steht. Da jedes Kind mindestens einen relevanten Namen hat, wird dabei jedes Kind mindestens einmal gezählt, manche Kinder werden doppelt gezählt, nämlich genau diejenigen Kinder, bei denen sowohl Vor- als auch Nachname relevant ist; und da jedes Kind genau einen Vor- und genau einen Nachnamen hat, kommen keine weiteren Mehrfachzählungen hinzu. Die Anzahl der Kinder ist somit die Anzahl der Zählungen vermindert um die Zahl der Doppelzählungen.

Die Anzahl der Doppelzählungen ist höchstens  $v \cdot (7 - v)$ , und da in der Liste an  $5 + 6 + \dots + 11 = 56$  Stellen ein Namen auftaucht, ist  $K \geq 56 - v \cdot (7 - v) \geq 56 - 3 \cdot 4 = 44$ .

(Führt man die gleiche Überlegung mit einer kompletten Klassenliste durch, so erhält man nur die schwächere Abschätzung  $K \geq 66 - v \cdot (11 - v) \geq 66 - 5 \cdot 6 = 36 \geq 33$ .)